کارگاه
آشنایی با ریاضیات فازی، منطق فازی و کاربردها

جلسه دوم:

عملگرهای مجموعه ای بر مجموعه های فازی

سید محمود طاهری

دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی

دانشگاه تهران

Sm_Taheri@ut.ac.ir

۱۸ اسفند ۱۴۰۰

پرسش کلیدی:

عملگرهای مجموعه ای (مانند متمم و اشتراک و اجتماع) بر مجموعه های فازی چگونه تعریف می شوند؟

ایدهٔ اصلی:

مشابه روش تعریف عملگرها در حالت معمولی که برپایهٔ تابع نشانگر است.

$I_A(x): X \rightarrow \{0, 1\}$

$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$

تعریف زیرمجموعه بودن در مجموعه های معمولی

$$A \subseteqq B \text{ iff } I_A(x) \leq I_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

متمم (Complement) یک مجموعهٔ معمولی

در مجموعه های معمولی، A^C متمم A نامیده می شود اگر، به ازای هر x از X

$$I_{A^c}(x) = 1 - I_A(x)$$

پرسش کلیدی:

عملگرهای مجموعه ای (مانند متمم و اشتراک و اجتماع) بر مجموعه های فازی چگونه تعریف می شوند؟

ایدهٔ اصلی:

مشابه روش تعریف عملگرها در حالت معمولی که برپایهٔ تابع نشانگر است.

$I_A(x): X \to \{0, 1\}$

$\Rightarrow$ $\mu_A(x): X \to [0, 1]$

تعریف زیرمجموعه بودن در مجموعه های معمولی

$$A \subseteqq B \text{ iff } I_A(x) \leq I_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

تعمیم به حالت فازی:

$$A \subseteqq B \text{ iff } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

متمم (Complement) یک مجموعهٔ معمولی

در مجموعه های معمولی، A^C متمم A نامیده می شود، اگر

$$I_{A^C}(x) = 1 - I_A(x)$$

تعمیم به حالت فازی:

متمم مجموعهٔ فازی A، مجموعهٔ فازی A^C با این تابع عضویت است

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

اشتراک؟

اجتماع؟

پرسش کلیدی:

عملگرهای مجموعه ای (مانند متمم و اشتراک و اجتماع) بر مجموعه های فازی چگونه تعریف می شوند؟

ایدهٔ اصلی:

مشابه روش تعریف عملگرها در حالت معمولی که برپایهٔ تابع نشانگر است.

$I_A(x): X \to \{0, 1\}$

$\mu_A(x): X \to [0, 1]$

تعریف زیرمجموعه بودن در مجموعه های فازی

$$A \subseteq B \text{ iff } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (\forall x \in X)$$

متمم (Complement) یک مجموعهٔ فازی

متمم مجموعهٔ فازی A، مجموعهٔ فازی A^C با تابع عضویت زیر است

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

اشتراک (Intersection) دو مجموعهٔ معمولی:

اشتراک دو مجموعه معمولی A و B، مجموعه ای است با تابع نشانگر

$$I_{A \cap B}(x) = \min\,[I_A(x), I_B(x)]$$

تعمیم به مجموعه های فازی:

اشتراک دو مجموعه فازی A و B، مجموعه فازی است با تابع عضویت

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

اجتماع (Union) دو مجموعهٔ معمولی:

اجتماع دو مجموعه معمولی A و B، مجموعه ای است با تابع نشانگر

$$I_{A \cup B}(x) = \max\,[I_A(x), I_B(x)]$$

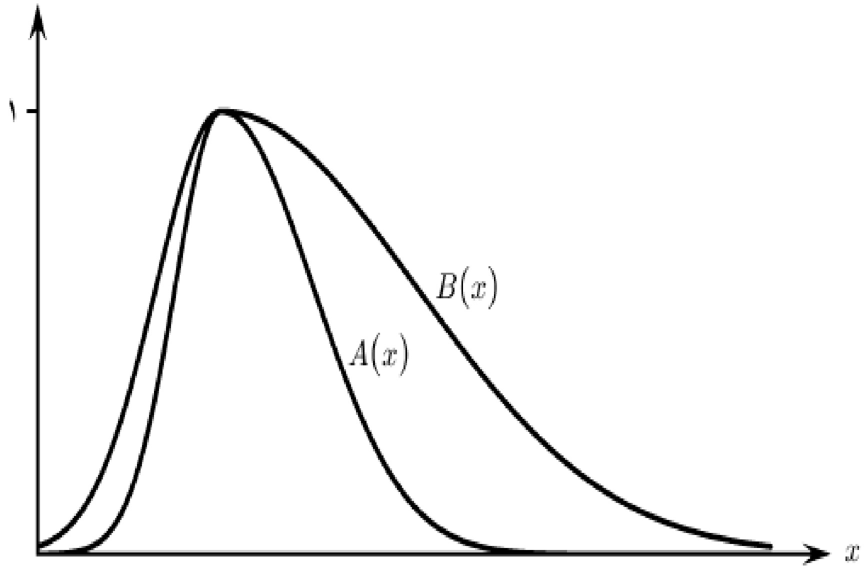
تعمیم به مجموعه های فازی:

اجتماع دو مجموعه فازی A و B، مجموعه فازی است با تابع عضویت

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

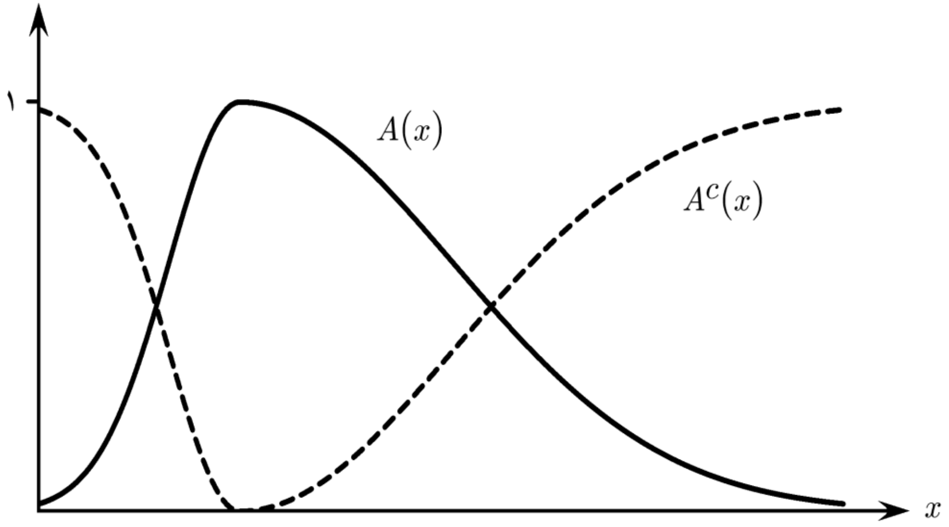
زیرمجموعه گی

A ⊆ B iff $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ $\forall x \in X$



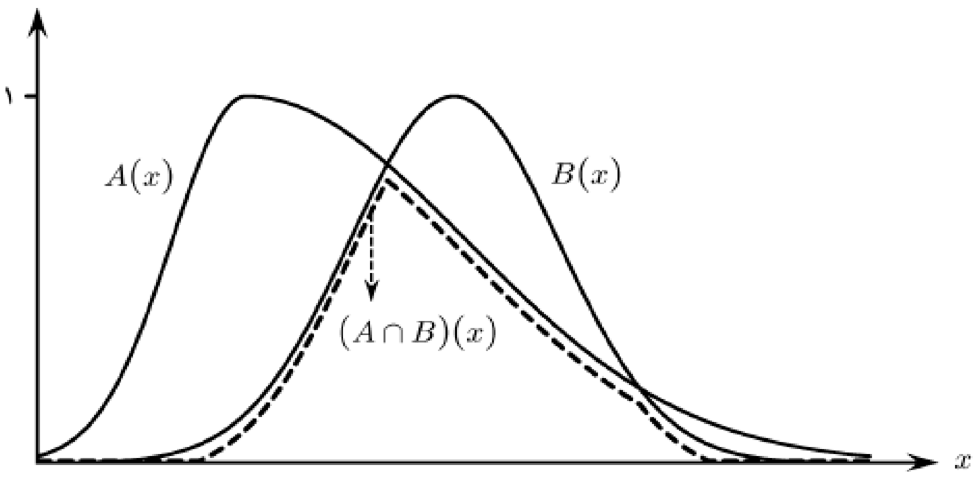
متمم

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \ (\forall x \in X)$$



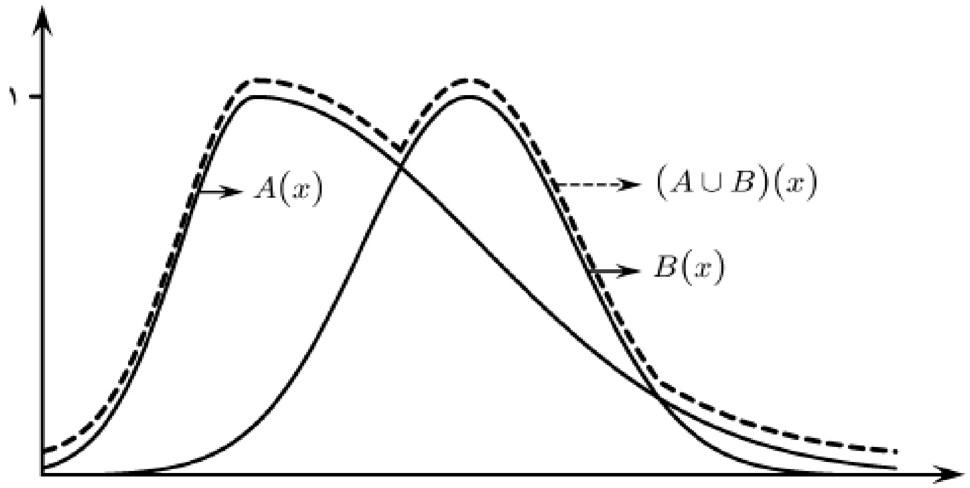
اشتراک دو مجموعه فازی

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$



اجتماع دو مجموعه فازی

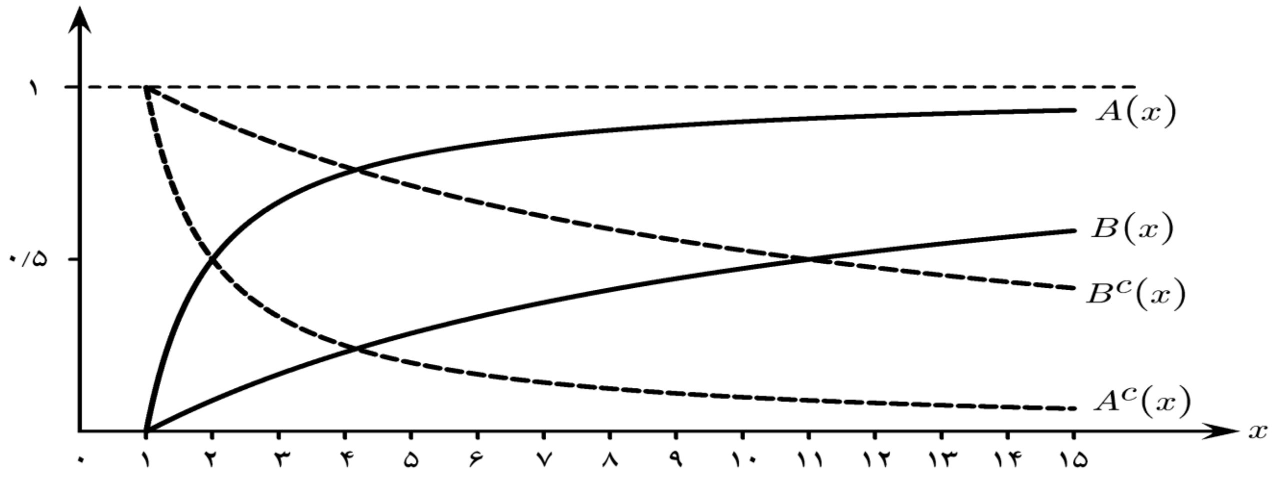
$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$



مثال ۱۱. فرض کنید مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی باشد یعنی $X = R$. مجموعه فازی A از X نشان‌دهنده ویژگی «نسبت به یک، بزرگ» و مجموعه فازی B از X بیانگر ویژگی «خیلی بزرگ‌تر از یک» را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$A(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱ \\ \dfrac{۱}{۱ + (x - ۱)^{-۱}} & ۱ < x \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۱ \\ \dfrac{۱}{۱ + ۱۰(x - ۱)^{-۱}} & ۱ < x \end{cases}$$

در این صورت $B \subseteq A$ زیرا برای هر x از X، $B(x) \leq A(x)$. یعنی هر عدد بزرگ‌تر از یک را که در نظر بگیریم، ویژگی «نسبت به یک، بزرگ» را بیشتر از ویژگی «خیلی بزرگ‌تر از یک» داراست (دقت کنید).



مثال ۱۲. نامزدهای تدریس یک درس: $X = \{\text{ارمغان، نگار، مینا، شقایق، نسرین}\}$

سه ویژگی کلیدی: توانایی علمی – توانایی بیان – انگیزه و علاقه

A: **مجموعه فازی افراد با توانایی علمی خوب:**

$$A=\left\{\frac{0.60}{\text{نسرین}},\frac{0.70}{\text{شقایق}},\frac{0.80}{\text{مینا}},\frac{0.85}{\text{نگار}},\frac{0.75}{\text{ارمغان}}\right\}$$

B: **مجموعه فازی افراد با توانایی تدریس بالا:**

$$B=\left\{\frac{0.65}{\text{نسرین}},\frac{0.70}{\text{شقایق}},\frac{0.65}{\text{مینا}},\frac{0.75}{\text{نگار}},\frac{0.65}{\text{ارمغان}}\right\}$$

C: **مجموعه فازی افراد با انگیزه و علاقه زیاد:**

$$C=\left\{\frac{0.70}{\text{نسرین}},\frac{0.40}{\text{شقایق}},\frac{0.50}{\text{مینا}},\frac{0.80}{\text{نگار}},\frac{0.80}{\text{ارمغان}}\right\}$$

توجه: میزان سازگاری و تطبیق اهمیت دارد (نه فراوانی نسبی یا شانس)

مجموعه فازی افراد با توانایی علمی خوب و توانایی تدریس بالا

$$A\cap B=\left\{\frac{0.60}{\text{نسرین}},\frac{0.70}{\text{شقایق}},\frac{0.65}{\text{مینا}},\frac{0.75}{\text{نگار}},\frac{0.65}{\text{ارمغان}}\right\}$$

مجموعه فازی افراد با توانایی علمی خوب یا توانایی تدریس بالا

$$A\cup B=\left\{\frac{0.65}{\text{نسرین}},\frac{0.70}{\text{شقایق}},\frac{0.80}{\text{مینا}},\frac{0.85}{\text{نگار}},\frac{0.75}{\text{ارمغان}}\right\}$$

مجموعه فازی افراد با توانایی علمی خوب و توانایی تدریس بالا و انگیزه و علاقه زیاد

$$A\cap B\cap C=\left\{\frac{0.60}{\text{نسرین}},\frac{0.40}{\text{شقایق}},\frac{0.50}{\text{مینا}},\frac{0.75}{\text{نگار}},\frac{0.65}{\text{ارمغان}}\right\}$$

ویژگی های عملگرهای مجموعه ای

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
$A \cup \phi = A, A \cup X = X$	$A \cap \phi = \phi, A \cap X = A$
$\phi^C = X, X^C = \phi, (A^C)^C = A$	

چه ویژگی در فهرست بالا نیست؟

ویژگی های عملگرهای مجموعه ای

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
$A \cup \phi = A, A \cup X = X$	$A \cap \phi = \phi, A \cap X = A$
$\phi^C = X, X^C = \phi, (A^C)^C = A$	

تنها قوانین مربوط به مجموعه‌های معمولی که در زمینهٔ مجموعه‌های فازی برقرار نیستند، قوانین شمول و طرد می‌باشند یعنی برای مجموعه فازی A، در حالت کلی

$$A \cap A^C \neq \phi, \; A \cup A^C \neq X$$

چه ویژگی در این فهرست نیست؟

پاسخ: قوانین شمول و طرد

چند پرسش

با چه روش های دیگری

می توان اشتراک و اجتماع را

تعریف کرد؟

چگونه اشتراک و اجتماع را
تعریف کنیم طوری که
قوانین شمول وطرد برقرار
باشند؟
این کار چه هزینه ای دارد؟

چگونه می توان میزان شباهت

دو مجموعه فازی را سنجید؟

(شاخص شباهت؟)