

**سید محمود طاهری**  
دانشکده علوم مهندسی، دانشکده گان فنی  
دانشگاه تهران  
**Sm\_Taheri@ut.ac.ir**

# کارگاه آشنایی با ریاضیات فازی، منطق فازی و کاربردها

جلسه اول:

مجموعه های معمولی و تابع نشانگر، مجموعه های فازی و تابع عضویت

۱۸ اسفند ۱۴۰۱



## مجموعه های معمولی تابع نشانگر

مجموعه (Set):

گردآیه ای مشخص از اشیاء (از مجموعه مرجعی مانند  $X$ )  
گردآیه مشخص؟

**مثال ۱.** مجموعه اعداد زوج (مجموعه مرجع: اعداد درست مثبت)

– مجموعه اعداد بین ۹۰۰ و ۱۱۰۰ (مجموعه مرجع: مجموعه اعداد حقیقی)

– روزهای با دمای بیشتر از ۳۵ درجه بزم در سال ۱۴۰۰

– افراد با ضریب هوشی بیشتر از ۱۰۸

– سایت های با بیش از ۸۷۰ مراجعه در شبانه روز

– رضایت تحصیلی برابر ۷۶ (در مقیاس مشخص)

– مجموعه گل های بنفشه و نرگس و نسترن و لاله

### نمایش مجموعه:

**روش اول** نوشتن اعضای مجموعه

**روش دوم** استفاده از تابع نشانگر

(Indicator function)

$$I_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$$

**مثال ۲.**  $A$ : مجموعه اعداد زوج (از مجموعه اعداد درست مثبت):  
 $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$$I_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases} = \begin{cases} 0 & x = 1, 3, 5, 7, \dots \\ 1 & x = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases}$$

**مثال ۳.**  $B$ : مجموعه دمای بیش از ۳۵ درجه (در بررسی دمای هوای شهرها)

$$B = (35, 75)$$

$$I_B(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 35 \\ 1 & x > 35 \end{cases}$$

**پرسش:** در زندگی واقعی چقدر از مفاهیم کاملاً دقیق - یعنی مجموعه های دقیق - استفاده می کنیم؟  
و چه اندازه از مفاهیم نادقیق؟

## نظریه مجموعه های فازی (Fuzzy Set Theory)

نظریه ای است به منظور  
صورت بندی مفاهیم نادقیق (/)  
مبهم) و تحلیل آنها.

به سخن دیگر: مجموعه فازی  
مجموعه ای است با کرانه های منعطف  
(/ نادقیق).

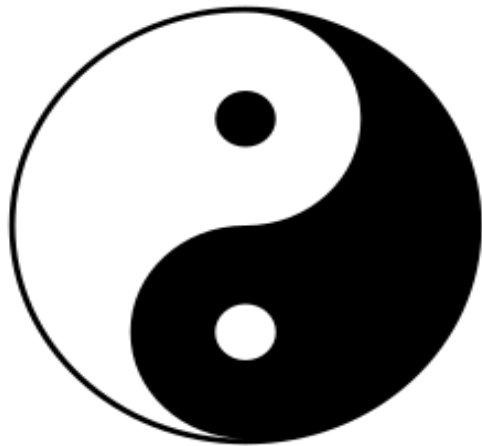
مثال ۴.

روزهای تابستانی کرمان با دمای بیش از  $33/7$  درجه.  
روزهای گرم تابستانی، روزهای خیلی گرم، روزهای کم و بیش گرم،

افراد با ضریب هوشی بیش از  $107$ .  
افراد با ضریب هوشی بالا، افراد خیلی باهوش، افراد کم هوش.

واکنش در کمتر از دو ثانیه.  
واکنش بسیار سریع، واکنش کند، واکنش بسیار کند،

گل‌های زیبا، مردان بلندقد، آموزش مؤثر، آزمون های دشوار،  
سایت‌های پرمراجعه، رضایت مندی متوسط از رشته تحصیلی،



## نظریهٔ مجموعه های فازی (Fuzzy Set Theory)

نظریه ای است به منظور  
صورت بندی مفاهیم نادقیق (/ مبهم) و  
تحلیل آنها.

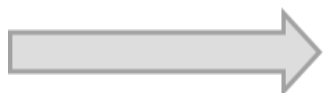
به سخن دیگر:

مجموعه فازی مجموعه ای است با کرانهای  
منعطف (/ نادقیق).

ایده و نقطهٔ آغاز:

تعمیم تابع نشانگر طوری که بُرد آن به جای  
مجموعهٔ دوعضوی  $\{0,1\}$ ، بازهٔ  $[0,1]$  باشد.

$$I_A(x): X \rightarrow \{0, 1\}$$



$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$$

## ایده و نقطه آغاز:



تعمیم تابع نشانگر طوری که بُرد آن به جای مجموعه دوعضوی  $\{0,1\}$ ، بازه  $[0,1]$  باشد.

$$I_A(x): X \rightarrow \{0, 1\}$$



$$\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$$

مجموعه فازی مجموعه ای است با کرانه‌های منعطف ( / مرزهای نادقیق).

## ایده و نقطه آغاز:

تعمیم تابع نشانگر طوری که بُرد آن به جای مجموعه دوعضوی  $\{0,1\}$ ، بازه  $[0,1]$  باشد.

مجموعه معمولی: Crisp set

مجموعه فازی: Fuzzy set

تابع نشانگر (Indicator function)



تابع عضویت (Membership function)

## مجموعه فازی و تابع عضویت

مثال ۵.

مجموعه مرجع:  $X = \{1,2,3,4,5\}$

A: مجموعه اعداد کوچکتر از ۴

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 1,2,3 \\ 0 & x = 4,5 \end{cases}$$

B: مجموعه فازی اعداد کوچک

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0.7 & x = 2 \\ 0.4 & x = 3 \\ 0.2 & x = 4 \\ 0 & x = 5 \end{cases}$$

دو به اندازه ۰/۷ عضو مجموعه فازی B است.

دو به اندازه ۰/۷ کوچک است.

دو به اندازه ۰/۷ با مفهوم کوچک، تطابق و سازگاری دارد.

مثال ۶. (مثالی دیگر همراه با نمادگذاری جدید)

$X = \{ \text{ارمغان، نگار، مینا، شقایق، نسرين} \}$

نامزدهای تدریس یک درس

مجموعه فازی افراد با توانایی علمی خوب

A =

$$\left\{ \frac{0.60}{\text{نسرين}}, \frac{0.70}{\text{شقایق}}, \frac{0.80}{\text{مینا}}, \frac{0.85}{\text{نگار}}, \frac{0.75}{\text{ارمغان}} \right\}$$

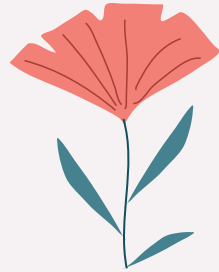
$\mu_A(x)$

x

نماد

گاهی، به کوتاهی:  $\mu_A(x) = A(x)$

# چند پرسش



تابع عضویت چه ویژگی هایی  
دارد؟



درجه عضویت چه چیزی را  
بیان می کند؟

**مثال ۷. M: مجموعه فازی بیانگر**

وزن "حدود ۷۵ (کیلوگرم)"

(وزن مطلوب برای مردان با قد و سن خاص)

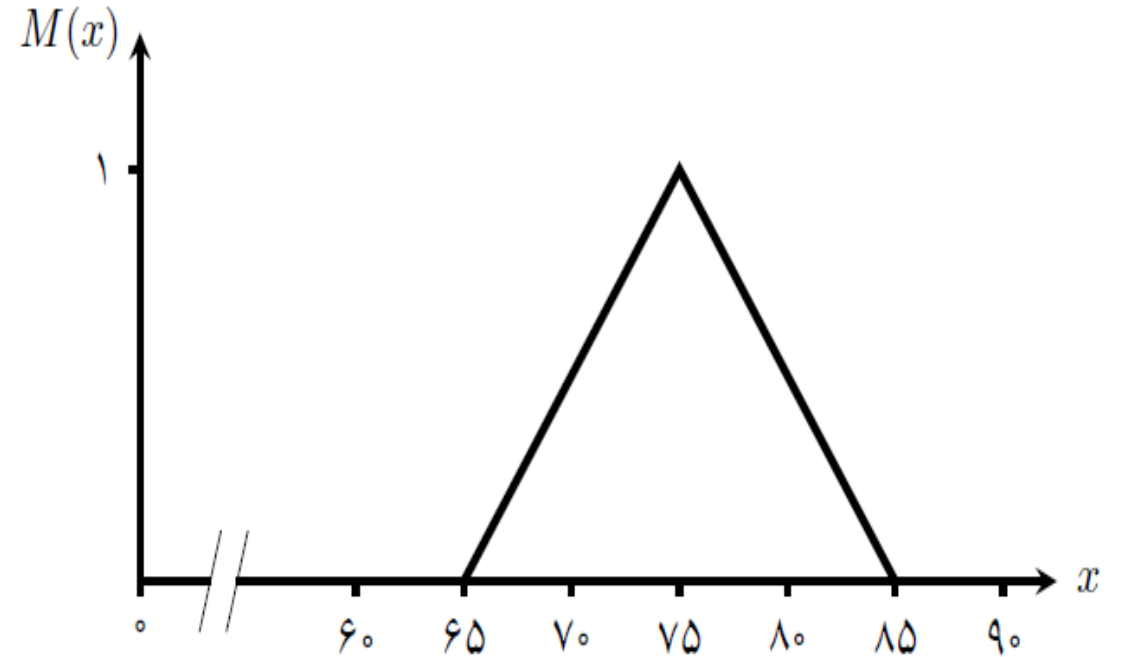
$$\mu_M(x) = \begin{cases} \frac{x-65}{10} & 65 < x \leq 75 \\ \frac{85-x}{10} & 75 < x \leq 85 \end{cases}$$

$M(75) = 1$ ، یعنی وزن ۷۵ کیلوگرم کاملاً مناسب برای مردان با قد و وزن موردنظر است.

$M(81) = 0.4$ ، یعنی وزن ۸۱ کیلوگرم به اندازه ۰/۴ مناسب مردان ... است.

$M(87) = 0$ ، یعنی وزن ۸۷ کیلوگرم اصلاً مناسب برای مردان ... نیست.

**توجه: سازگاری (Consistency)**  
**و تطابق (Compatibility)**



نمودار تابع عضویت وزن مطلوب (برای ...)



**مثال ۸.** دو مجموعه فازی بیانگر وزن "حدود ۷۵ (کیلوگرم)" (وزن مطلوب مردان با قد و سن خاص)

**با دو تابع عضویت مختلف**

برای نمونه، چنانچه وزن افشین ۷۳ باشد

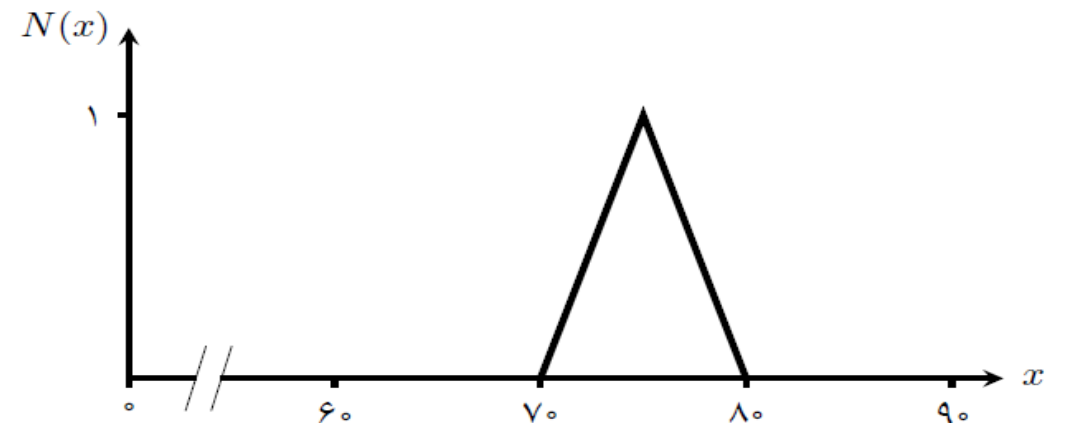
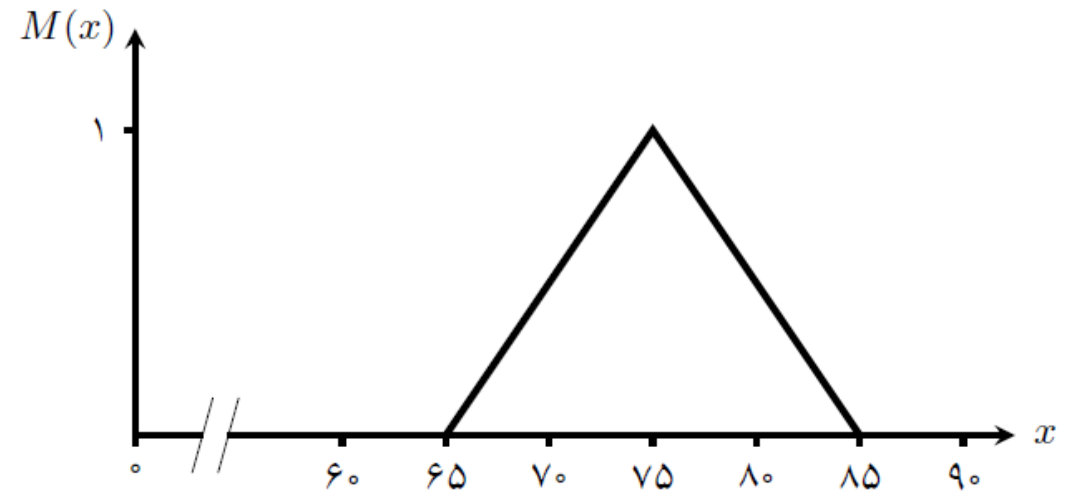
$$M(73) = 0.8$$

ولی

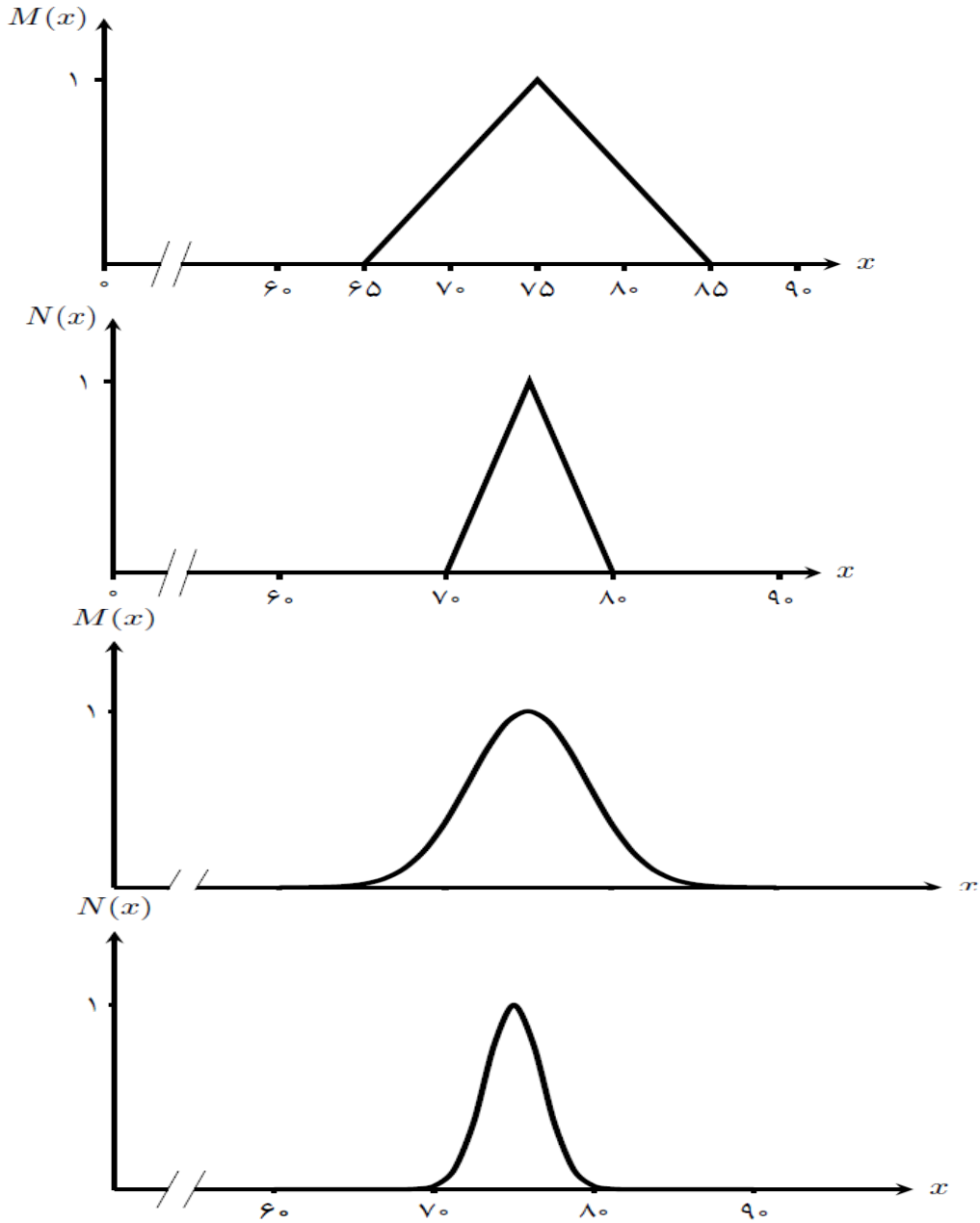
$$N(73) = 0.6$$

یعنی از دید متخصص اول، افشین که ۷۳ کیلو وزن دارد به میزان ۰/۸ وزنش مطلوب است، ولی از دید متخصص دوم، وزن افشین به اندازه ۰/۶ مطلوب است.

**نکته:** امکان مدل سازی دیدگاه های مختلف، با به کارگیری توابع عضویت مختلف



دو تابع عضویت مختلف برای مدل سازی وزن مطلوب (برای مردان با قد و سن خاص)



**مثال ۹. چهار مجموعه فازی بیانگر**

وزن "حدود ۷۵ (کیلوگرم)"  
 (وزن مطلوب مردان با قد و سن خاص)

**با چهار تابع عضویت مختلف**

**توابع عضویت مثلثی و گاوسی (/ نرمال)  
 با ابهام های متفاوت**

**نکته: امکان مدل سازی دیدگاه های مختلف،  
 با به کارگیری توابع عضویت مختلف**

## مثال ۱۰. مجموعه فازی با تابع عضویت نامتقارن

(مدل سازی درجه حرارت مطلوب)

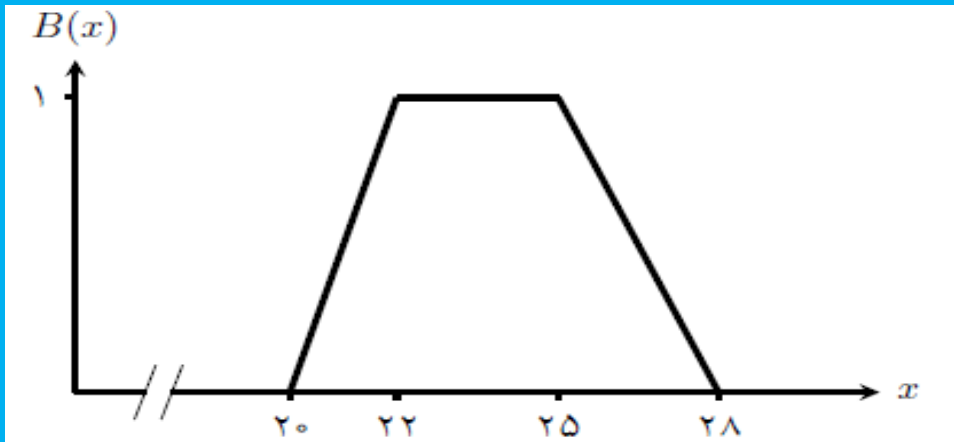
درجه مطلوب هوای اتاق کار از دید بهار

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x - 20}{2} & 20 \leq x < 22 \\ 1 & 22 \leq x < 25 \\ \frac{28 - x}{3} & 25 \leq x < 28 \end{cases}$$

برای نمونه:  $B(27)=0.33$  و  $B(21)=0.5$  و  $B(22.5)=1$

مثلاً:  $B(27)=0.33$  یعنی:

- درجه عضویت مقدار ۲۷ در مجموعه فازی "درجه هوای مطلوب" برابر  $0.33$  است.
- هوای ۲۷ درجه، از دید بهار، به میزان  $0.33$  مطلوب است.
- از دید بهار، هوای ۲۷ درجه، به میزان  $0.33$  با مفهوم "درجه هوای مطلوب" تطابق دارد.



## مثال ۱۱. مجموعه فازی با تابع عضویت صعودی (مدل سازی نمره درسی خوب)

برای نمونه:

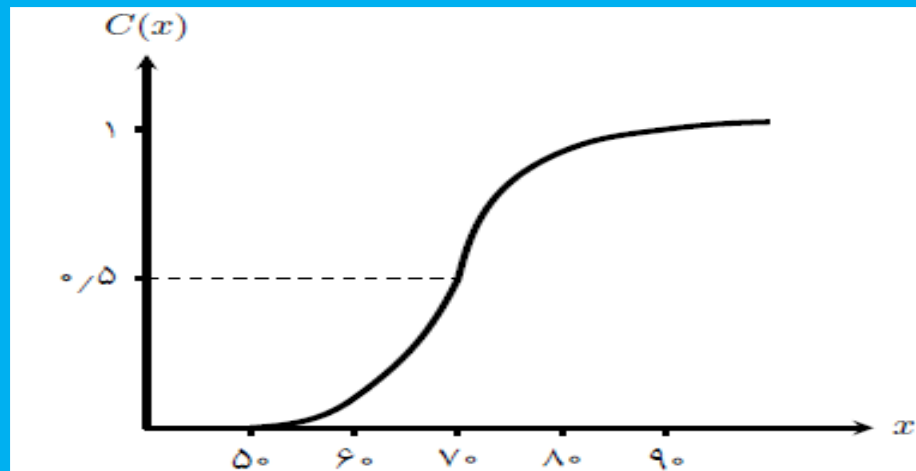
$$C(65) \approx 0.28 \text{ و } C(44) = 0$$

$$C(90) = 1 \text{ و } C(70) = 0.5$$

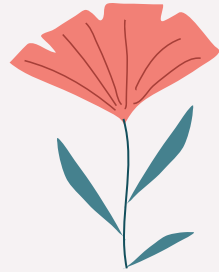
مثلاً  $C(65) \approx 0.28$  یعنی:

- درجه عضویت نمره ۶۵ در مجموعه فازی "نمره خوب" تقریباً ۰/۲۸ است.
- نمره ۶۵، از دید الگوی بالا، به میزان ۰/۲۸ مطلوب است.
- نمره ۶۵، از دید الگوی بالا، با مفهوم "نمره خوب" به میزان ۰/۲۸ تطبیق و سازگاری دارد.

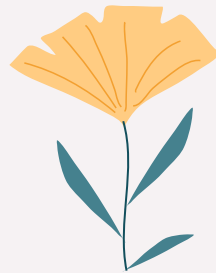
$$C(x) = \begin{cases} 0 & x < 50 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{x - 50}{20} \right)^2 & 50 \leq x < 70 \\ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{85 - x}{15} \right)^2 & 70 \leq x < 85 \\ 1 & 85 \leq x \end{cases}$$



# چند پرسش



تابع عضویت چه ویژگی هایی دارد؟



درجه عضویت چه چیزی را بیان می کند؟

انواع دیگر تابع عضویت؟