سؤالات موضوعی نهایی

((هندسه ۳))

پایه دوازدهم رشته ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

آخرین نسخه: دی ۱۴۰۰

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

((فصل اوّل : ماتریس و کاربردها))

❋❋❋

درس۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

(❋) مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، را ماتریس .... می نامند.

۲	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i<j \\ -i+j & i\geq j \end{cases}$ می باشد. مجموع درایه های ستون دوّم ماتریس A را به دست آورید.

۳	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ که در آن $a_{ij}=\dfrac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایه های واقع در سطر سوّم و ستون دوّم ماتریس A برابر است با : ....

۴	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.

۵	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس .... می نامیم.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آنگاه آن را یک ماتریس ..... می نامیم.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

ماتریس مربعی که تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس اسکالر نامیده می شود.

۸	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۸ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ...... است.

۹	دی ۱۳۹۹	۰/۷۵ نمره

۹ : اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ ۲ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد، درایه های $a_{۳۳}$ و $a_{۳۱}$ و $a_{۱۲}$ را به دست آورید.

۱۰	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

ماتریس مربعی که همه‌ی درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند.

(❋) ماتریس های مساوی

۱	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ ، در این صورت حاصل $x+y+z$ را بیابید.

۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۲ : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند. مقدار $x+y+z$ را بیابید.

(❋) اعمال روی ماتریس ها

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با یک کلمه‌ی مناسب پرکنید.

حاصل ضرب ماتریس های خاصیت جابجایی ....

۲	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۲ : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف: اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه های سطر دوّم $A^{۳}$ برابر۵ می باشد.

ب: اگر $A^{۲}=A$ باشد. در این صورت داریم : $(A+I)^{۲}=I+۳A$

۳	دی ۱۳۹۷	۱/۲۵ نمره

۳ : اگر ماتریس A به صورت زیر تعریف شده باشد. ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید.

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۳} \quad , \quad a_{ij}=\begin{cases} i.j & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$$

۴	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۴ : اگر ضرب ماتریس های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد.

حاصل $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix} \times [x \quad ۲ \quad -y]$ را بیابید.

۵	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم، $AB=AC$ آنگاه لزوماً $B=C$ است.

۶	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۶ : در معادله‌ی ماتریسی $[۳x \quad ۲]\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.

۷	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۷ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۷}$ را به دست آورید.

۸	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : ماتریس های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را

چنان بیابید که داشته باشیم : $A^۲ - B = \overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

۹	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالت کلی حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & a \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$

ماتریس قطری باشد.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۱ : معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$ را حل کنید.

۱۲	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

حاصل ضرب ماتریس ها، خاصیت جابجایی ....

۱۳	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم، $AB = AC$ ، آنگاه لزوماً $B = C$ است.

۱۴	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۴ : مقادیر x و y را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & y-۲ \end{bmatrix}$$

۱۵	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۴ \\ -۱ & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

۱۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

اگر ماتریس A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی و مخالف صفر باشد و $rA=rB$ ، آنگاه داریم : $A=B$

۱۷	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۷ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & m-۲ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۰ & n+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ n & ۰ & m \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

۱۸	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۸ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند، آنگاه عبارت $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ همواره برقرار است.

۱۹	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۱۹ : اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۴ \\ -۱ & b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد. مقادیر b و a را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

***

درس۲ : وارون ماتریس و دترمینان

(*) دترمینان

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۷۵ نمره

۱ : اگر A ماتریس ۳×۳ باشد و $|A|=-۲$. حاصل $||A|.A|$ را بیابید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱نمره

۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^3|$ را محاسبه کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصل ضرب ....

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A|=2$. حاصل $\left|\frac{1}{|A|}A\right|$ را بیابید.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با ....

۶	شهریور ۱۳۹۸	۲ نمره

۶ : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد.

الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با ....

۸	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند. دترمینان ماتریس BA را بدست آورید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۲$ باشد،آنگاه $|۲A|=۱۶$ است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۰ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} m-۲ & ۲ \\ ۱ & n+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ n & ۰ & m \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد،

حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

۱۱	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۷۵ نمره

۱۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۴ & -۴ \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد، آنگاه $|\frac{۱}{۲}A|$ برابر ...... است.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|B^{۲}|+|A|$ را بیابید.

۱۴	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۴ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه‌ی $A^{۲}=mA+۲I_{۲}$ برقرار باشد.

($I_{۲}$ ماتریس همانی است.)

۱۵	دی ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|A+B|+|۲I_۳|=$

۱۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۶ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} f & ۰ & ۲ \\ ۰ & a & ۰ \\ b & c & e \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر .... است.

۱۷	شهریور ۱۴۰۰	۱/۷۵ نمره

۱۷ : دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف : آیا جمع دو ماتریس B و A تعریف می شود؟ چرا؟

ب : حاصل $|A\times B|$ را به دست آورید

(❋) وارون ماتریس

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد، آن است که دترمینان ماتریس A .... باشد.

۲	شهریور ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۲ : مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & m \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۳	خرداد۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A=\begin{bmatrix} ۸ & a \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.

۴	خرداد۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۴ : الف : اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

ب : ماتریس وارون A را حساب کنید.

۵	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۵ : اگر $۲A=\begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید.

۶	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۶ : ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

(❋) حل دستگاه معادلات

۱	دی۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : دستگاه زیر به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می باشد.

$$\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۲ : مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۳ \\ ۴x+(m+۴)y=۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر داشته باشیم $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۴ \\ x-y=۳ \end{cases}$$

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $|A|\neq ۰$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۷	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۷ : جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$$

۸	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۸ : در تساوی $\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۹ : الف : حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx+۳y=۱ \\ ۲x-y=۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصر بفرد باشد.

ب : جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۰ : دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف : در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۲ : الف : به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ mx+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

ب : دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۶y=-۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

۱۳	دی ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۳ : دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$$

۱۴	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۴ : جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۷ \\ ۲x+y=۱ \end{cases}$$

۱۵	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۵ : مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

❋❋❋

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

((فصل دوّم :آشنایی با مقاطع مخروطی))

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

صفحه‌ای با مولد سطح مخروطی دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولّد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

۳	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی l عمود باشد و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی L عمود باشد و از رأس آن عبور کند، شکل حاصل یک ..... خواهد بود.

۵	دی۹۹	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند. فصل مشترک حاصل یک .... خواهد بود.

۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۶ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند. در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک .... است.

۷	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۷ : اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

(❋) مکان هندسی

۱	دی ۱۳۹۷	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d' و d به یک فاصله اند. نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۳ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطه‌ی ثابت، یک مقدار ثابت باشد، یک .... است.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (پیرامون وجود جواب بحث کنید.)

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه‌ی به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (در مورد تعداد نقاط در حالت های مختلف بحث کنید.)

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی باشد. (پیرامون جواب مسئله بحث کنید.)

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج اند، دایره ی $C'(O,2r)$ است.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۸ : نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند، نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد.(بحث کنید.)

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.

۱۰	شهریور ۱۳۹۹	۰/۵ نمره

۱۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف : مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

ب : هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

۱۱	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، نیمساز زاویه‌ی بین آن دو خط می باشد.

۱۲	دی ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۲ : نقطه‌ی A و خط d در صفحه‌ی مفروض اند. نقطه ای را بیابید که از A به فاصله‌ی۲ سانتی متر و از خط d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد. در مورد روش حل بحث کنید.

۱۳	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند، یک نیم خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

۱۴	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا است که همه‌ی آنها یک ویژگی ...... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشند.

۲	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۲ : حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.

۳	دی ۱۳۹۷	۱/۷۵ نمره

۳ : دایره های $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=-۵$ بر آن مماس باشد.

۵	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۵ : از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دایره های $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ و $x^۲+y^۲=۱$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۷	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(-۲,۳)$ مرکز آن و $M(۱,-۱)$ یک نقطه از آن باشد.

۸	شهریور۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : وضعیت خط $x+y=۲$ و دایره‌ی $x^۲+y^۲=۲$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

معادله‌ی ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادله‌ی یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲<۴c$ باشد.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,-۲)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۴$ مماس خارج باشد.

۱۱	دی ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۱۱ : وضعیت خط $۳x+y=۰$ را نسبت به دایره‌ی $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ مشخص کنید.

۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۲ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : وضعیت نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ نسبت به دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ را تعیین کنید.

۱۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۱۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۱۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۱۵ : وضعیت دو دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۴$ و $x^۲+y^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۶	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

رابطه‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱۰=۰$ معادله‌ی یک دایره است.

۱۷	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۳,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $۴x+۳y+۵=۰$ مماس باشد.

۱۸	شهریور۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۸ : وضعیت خط $x-y-1=0$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۹	شهریور۱۳۹۹	۲ نمره

۱۹ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله‌ی

$x^2+y^2-8x+4y+16=0$

مماس داخل باشد.

۲۰	دی۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۲۰ : درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $(3,-2)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد.

۲۱	دی۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

۲۲	دی۱۳۹۹	۲ نمره

۲۲ : وضعیت دو دایره‌ی $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۲۳	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,1)$ بوده و بر خط $3x+4y=-5$ مماس باشد.

۲۴	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۴ : وضعیت دایره‌ی $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ با دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

۲۵	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۵ : نقطه‌ی $(3,-2)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد.

۲۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۶ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

۲۷	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۷ : در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

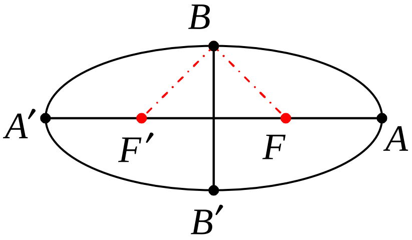
❋❋❋

درس ۳ : بیضی و سهمی

(❋) بیضی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : در بیضی شکل مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید.



۲	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

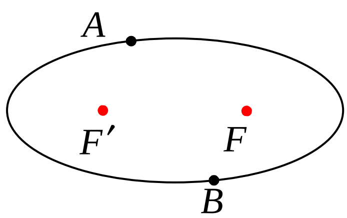
در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک .... می شود.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۳ : اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی۱۶ باشد. طول قطر بزرگ بیضی و فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل، روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. اگر $AF'=BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی اند.

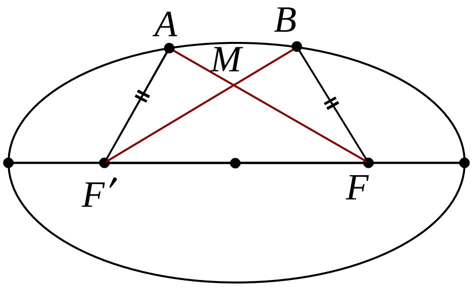


۵	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر $A(۲,۱۲)$ و $A'(۲,-۸)$ دو رأس بیضی(AA' قطر بزرگ بیضی) و خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد. فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید.

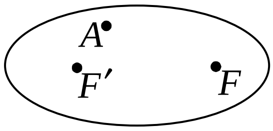
۶	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. با توجه به شکل، اگر $AF' = BF$ باشد. نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است.



۷	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۷ : در شکل مقابل نقطه‌ی A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند. ثابت کنید که مجموع فواصل نقطه‌ی A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.



۸	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۸ : بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

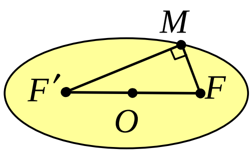
۹	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.

۱۰	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۱۰ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم الزاویه است. طول MF را بدست آورید. (F و F' کانون های بیضی هستند.)



۱۱	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر مجموع فواصل نقطه‌ی A از دو کانون بیضی بیشتر از طول بزرگ باشد، نقطه‌ی A در .... بیضی است.

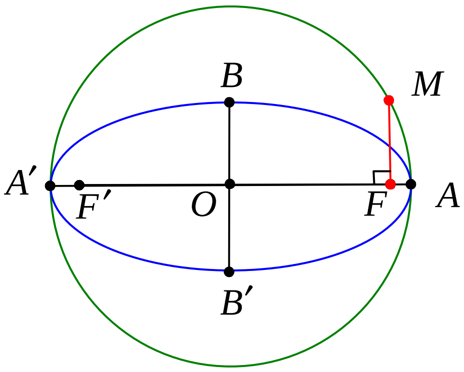
۱۲	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

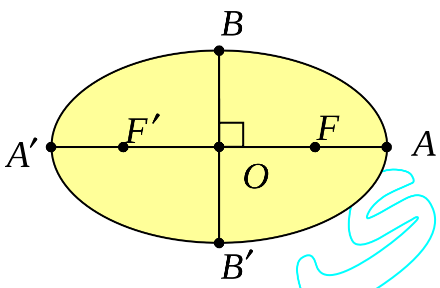
۱۳	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۳ : قطر دایره‌ی C مانند شکل مقابل، قطر بزرگ بیضی است. و از کانون F عمودی بر قطر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید که اندازه‌ی MF برابر نصف اندازه‌ی قطر کوچک بیضی است.



۱۴	خرداد ۱۳۹۹	۱/۵ نمره

۱۴ : در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟



۱۵	خرداد ۱۳۹۹	۱ نمره

۱۵ : اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله‌ی کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۱۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۱۶ : در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

در صورتی که خروج از مرکز بیضی برابر ...... باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.

۱۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

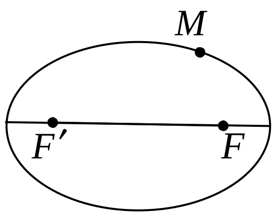
۱۷ : در یک بیضی خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ و اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر ۲۰ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۸ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند.

خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند.

ثابت کنید $NF' = MF'$



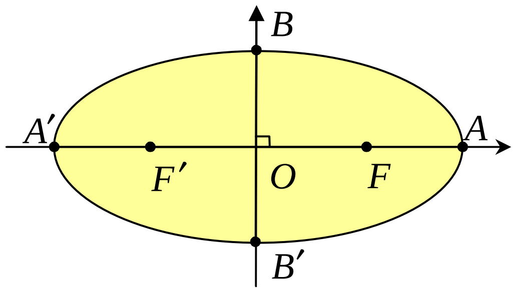
۱۹	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۹ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله‌ی کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است.

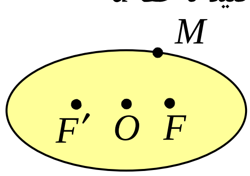
۲۰	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۲۰ : مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



۲۱	شهریور ۱۳۹۹	۱ نمره

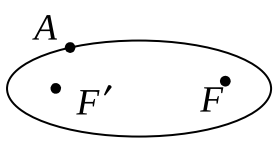
۲۱ : در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $MF' = NF'$



۲۲	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۲۲ : دو نقطه‌ی A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون های بیضی اند.

اگر $AF' = BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازیند.



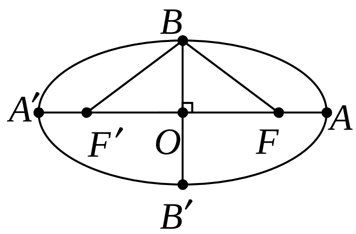
۲۳	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۳ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ بیضی به .... تبدیل می شود.

۲۴	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره

۲۴ : در بیضی شکل مقابل، اگر $OA=a$ و $OB=b$ و $OF=c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲=b^۲+c^۲$

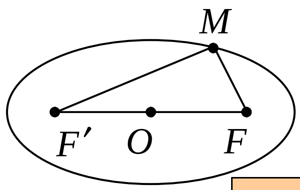


۲۵	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۲۵ : نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

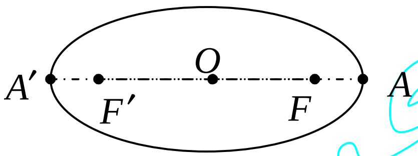
الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ب) طول MF را به دست آورید. (F' و F کانون های بیضی هستند و $MF < MF'$)



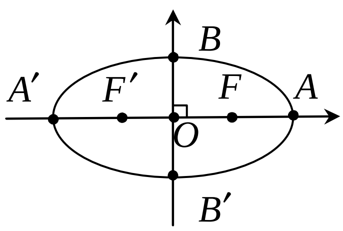
۲۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۲۶ : در بیضی روبرو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون های بیضی هستند. ثابت کنید $A'F'=AF$



۲۷	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۲۷ : در بیضی مقابل، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $F'BF$ را به دست آورید.



۲۸	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۲۸ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

در حالتی که $\frac{c}{a}=۱$ بیضی به یک ..... تبدیل می شود.

(❀)سهمی

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۲۵ نمره

۱ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $F(۱,-۲)$ کانون و $S(۱,۲)$ رأس آن باشد. سپس خط هادی آن را بنویسید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۲ نمره

۲ : سهمی $y^{۲}-۲y+۸x+۹=۰$ مفروض است.

الف : مختصات رأس، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۳ : سهمی به معادله‌ی $y^{۲}=۴x-۴y$ مفروض است. مختصات رأس سهمی، مختصات کانون سهمی و معادله‌ی خط هادی را بنویسید و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را .... می نامیم.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۵ : اگر نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف: معادله‌ی سهمی را بنویسید.

ب : مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۶ : سهمی $y^{۲}=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم. معادله‌ی دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۷	خرداد ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از .... خواهد گذشت.

۸	خرداد ۱۳۹۹	۲/۵ نمره

۸ : الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی $x^{۲}-۴y+۸x=۰$ را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۹ : سهمی $y^{۲}=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲ نمره

۱۰ : سهمی $x^{۲}=۲y-۴x$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی و محور های مختصات را بیابید.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۱ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیر واقع برآن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۱۲	شهریور ۱۳۹۹	۱/۷۵ نمره

۱۲ : مختصات کانون، مختصات رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله‌ی $y^{۲}-۶y+۱۶x+۲۵=۰$ را تعیین کنید.

۱۳	شهریور ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۳ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۴,۶)$ رأس و $y=۳$ معادله‌ی خط هادی آن باشد.

۱۴	دی ۱۳۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۴ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

رأس سهمی به معادله‌ی $y^{۲}+۲x-۲y=۰$ ، نقطه‌ای به مختصات .... است.

۱۵	دی ۱۳۹۹	۱/۲۵ نمره

۱۵ : معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد. سپس خط هادی آن را بیابید.

۱۶	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۶ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

۱۷	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۷ : اگر نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد.

الف : معادله‌ی سهمی را به دست آورید. ب : مختصات کانون سهمی را بیابید.

۱۸	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

۱۸ : در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه‌ی دایره ای به قطر۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد، مفروض است. فاصله‌ی کانونی این دیش را به دست آورید.

۱۹	شهریور ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۹ : سهمی به معادله‌ی $y^۲-۲y+۸x+۹=۰$ را در نظر بگیرید.

الف : مختصات رأس ، کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

❋❋❋

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

((فصل سوّم : بردارها))

❋❋❋

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۱ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

نقطه‌ی $A(۲,-۳,۰)$ روی صفحه‌ی xoy قرار دارد.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۲ : به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه‌ی xoy موازی باشد.

ب : معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ : در فضای $R^۳$ ، نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور طول ها و نقطه‌ی $B(-۴,۶,-۳)$ مفروض اند. مختصات نقطه‌ی وسط AB را بیابید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۵ نمره

۳ : نقاط $A(۲,۱,۳)$ و $B(-۱,۱,۳)$ در فضای $R^۳$ مفروض اند. معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

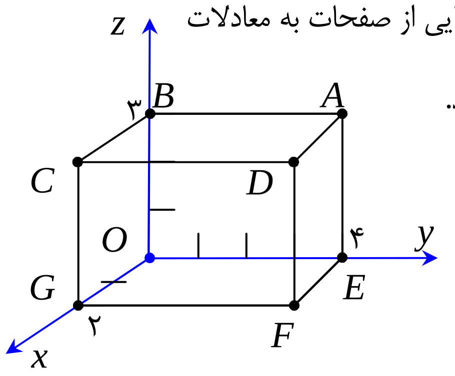
۴ : نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $R^۳$ مفروض اند.

الف: طول پاره خط AB را به دست آورید.

ب : معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت هایی از صفحات به معادلات $(x=0\ ,\ x=2)$ و $(y=0\ ,\ y=4)$ و $(z=0\ ,\ z=3)$ هستند.



الف : مختصات نقطه‌ی A را مشخص کنید.

ب : معادلات مربوط به یال AD و وجه $CDFG$ را بنویسید.

۶	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۶ : درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید.

نقطه‌ی $(0\ ,-1\ ,-2)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱ نمره

۷ : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله‌ی $y=0$ دارد؟ چرا؟

۸	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ در فضای R^2 چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار $x=0$ دارد؟

ب : اگر $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ باشد. اندازه‌ی بردار $\vec{a}+2\vec{b}$ را به دست آورید.

۹	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۹ : نقاط $A(1,2,1)$ و $B(2,2,1)$ و $C=(3,2,-1)$ را در فضا در نظر می گیریم، کدام ها روی خط $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۱۰	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید.

در فضای R^3، نقطه‌ی $(-3,2,-5)$ در ناحیه‌ی(کنج) .... دستگاه مختصات قرار دارد.

۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۱۱ : به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $y=b$ معادله‌ی صفحه ای در فضای R^3 باشد که از نقطه‌ی $A=(2,-3,4)$ بگذرد، مقدار عددی b چقدر است؟

ب) معادلات $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات R^3 است؟

پ) در فضای R^3، نقطه‌ی A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی yoz و نقطه‌ی $B(-4,6,-3)$ مفروض اند، مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

۱۲	شهریور ۱۴۰۰	۲ نمره

۱۲ : نقطه‌ی A به طول ۲ روی محور x ها و نقطه‌ی B روی صفحه‌ی xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه بعدی مفروض اند.

الف : مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

ب : طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

پ : مختصات وسط پاره خط AB را به دست آورید.

***

(*) بردار ها

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(3,1,-1)$ و $r=2$ باشد، بردار $r\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : اگر $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{b}=(1,2,1)$ باشد. طول بردار $\vec{a}-2\vec{b}$ را به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۳ : اگر $\vec{a}=2\vec{j}-3\vec{k}$ و $\vec{b}=(0,1,-1)$ باشند. بردار $\vec{c}=2\vec{b}-\vec{a}$ را به دست آورید.

۴	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۴ : در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر دو بردار مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ..... باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است.

۵	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۵ نمره

۵ : اگر $\vec{a}=(\sqrt{8},2,4)$ و $\vec{b}=-6\vec{j}+8\vec{k}$ و $r=\frac{-1}{2}$

الف : طول بردار $r\vec{b}$ را مشخص کنید. ب : بردار $r\vec{a}+\vec{b}$ را بیابید.

۶	دی ۹۹	۱/۵ نمره

۶ : دو بردار $\vec{a}=(1,2,-1)$ و $\vec{b}(0,2,-1)$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای R^3 واقع است. (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

۷	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۷ : بردار $\vec{a}=۲\vec{j}-\vec{k}$ در فضا سه بعدی بر کدام صفحه‌ی مختصات سه بعدی منطبق است؟

از بین گزینه های زیر انتخاب کنید.

xoy و yoz و xoz

❋❋❋

درس۲ : ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

حاصل ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر............. است.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید : $|\vec{a}.\vec{b}|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۴ : مقدار m را طوری تعیین کنید که زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(m,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ برابر ۴۵ درجه باشد.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$

در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۶	دی ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{a}=\|\vec{a}\|^۲$

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم : $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ در این صورت $\theta=\frac{\pi}{۲}$ است. (θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.)

۸	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۸ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۰,-۱,-۱)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ را به دست آورید.

۹	دی ۹۹	۱ نمره

۹ : برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، ثابت کنید: اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$ باشد، آنگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

۱۰	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۰ : درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر زاویه‌ی بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آنگاه ضرب داخلی آنها یک عدد حقیقی مثبت است.

۱۱	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۱ : اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند، به ترتیب با طول های ۱و۲و۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به دست آورید.

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : اگر $\vec{c}(-۱,۱,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(-۱,-۳,۰)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱/۷۵ نمره

۲ : بردار های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و سپس تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۳	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۵,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ بیابید.

۴	شهریور ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : ثابت کنید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۵	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۵ : بردارهای $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(-۲,۰,۲)$ مفروض اند:

الف : تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۶	خرداد ۱۳۹۹	۲ نمره

۶ : بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۹	۱ نمره

۷ : بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

۸	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

۸ : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۹	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۹ : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را بیابید.

❋❋❋

(❋) ضرب خارجی دو بردار

۱	دی ۱۳۹۷	۱/۵ نمره

۱ : برادر های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۲	خرداد ۱۳۹۸	۰/۷۵ نمره

۲ : بردار های $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ را در نظر بگیرید و برداری عمود بر این دو بردار بنویسید.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۳ : ثابت کنید،

دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

۴	تیر ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۴ : برادر های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۸$ و $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲$ باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۵	شهریور ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۵ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای بردار غیر صفر $\vec{a}$ در $R^۳$ داریم ، $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

۶	شهریور ۱۳۹۸	۱ نمره

۶ : اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به دست آورید.

۷	دی ۱۳۹۸	۰/۲۵ نمره

۷ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^{۳}$ باشند، حاصل $\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j})$ برابر است با ....

۸	خرداد۱۳۹۹	۲ نمره

۸ : دو بردار $\vec{a}=(۳,-۲,۱)$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف : بردار $\vec{a}$ در کدام از فضای $R^{۳}$ واقع (شماره‌ی ناحیه ذکر شود.)

ب : طول بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را حساب کنید.

پ : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

۹	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۰/۲۵ نمره

۹ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید.

برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، نامساوی $|\vec{a}.\vec{b}|\geq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ برقرار است.

۱۰	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۱/۲۵ نمره

۱۰ : ثابت کنید دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

۱۱	شهریور ۱۳۹۹	۲ نمره

۱۱ : بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید.

الف : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۲	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۲ : جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

حاصل ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار .... است.

۱۳	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره

۱۳ : درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، حاصل $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$ است.

۱۴	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۴ : ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

۱۵	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۵ : برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول های واحد روی محور های مختصات در $R^{۲}$ ، داریم : $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

۱۶	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

۱۶ : بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به طول های $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۲۶$ و اندازه‌ی ضرب خارجی $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۷۲$ مفروض اند.

اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ کمتر از ۹۰ درجه باشد. مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.

❋❋❋

❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱	دی ۱۳۹۷	۱ نمره

۱ : مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ تولید می شود را به دست آورید؟

۲	خرداد ۱۳۹۸	۱ نمره

۲ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,m,-۱۱)$ و $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.

۳	خرداد ۱۳۹۸	۱/۲۵ نمره

۳ : اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد. مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۴	تیر ۱۳۹۸	۱ نمره

۴ : حجم متوازی السطوحی را محاسبه کنید که توسط بردار های $\vec{c}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۲)$ و $\vec{a}=(۲,۱,۰)$ تولید می شود.

۵	تیر ۱۳۹۸	۲ نمره

۵ : سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض اند.

الف : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.

ب : حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۶	دی ۱۳۹۸	۱/۵ نمره

۶ : اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۷	خرداد ۱۳۹۹ خارج کشور	۲/۲۵ نمره

۷ : برداری های $\vec{a}=(-۴,۳,-۵)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ را در نظر بگیرید.

الف : تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب : برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

ج : مساحت مثلث پدید آمده توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

۸	دی۹۹	۱ نمره

۸ : مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ بوجود می آید.

۹	خرداد ۱۴۰۰	۲ نمره

۹ : سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}(۲,۱,-۲)$ مروض اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را به دست آورید.

۱۰	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۰ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۰,m,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۲,۳)$ در یک صفحه باشند.

❋❋❋

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل اوّل هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

(❋) مفهوم ماتریس و ماتریس های خاص

۱ : اسکالر

۲ :

$a_{۱۲} = ۱ - ۲(۲) = -۳$ و $a_{۲۲} = -۲ + ۲ = ۰$ و $a_{۳۲} = -۳ + ۲ = -۱$

$a_{۱۲} + a_{۲۲} + a_{۳۲} = -۳ + ۰ + (-۱) = -۴$

۳ : ۶

۴ : درست

۵ : اسکالر

۶ : سطری

۷ : نادرست

۸ : $m = ۱$

۹ :

$a_{۳۳} = ۲$ و $a_{۳۱} = ۳ + ۱ = ۴$ و $a_{۱۲} = ۱ - ۲ = -۱$

۱۰ : قطری

(❋) ماتریس های مساوی

۱ :

$$A=B\rightarrow\begin{cases}۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}}y=۲\Rightarrow x+y+z=\frac{۳}{۲}+۲+(-۲)=\frac{۳}{۲}\\ z=-۲\end{cases}$$

۲ :

$$\begin{cases}x-۱=y+۱\\ x-۲=۸\\ z+۱=۴\end{cases}\longrightarrow x=۱۰\ ,\ \ y=۸\ ,\ z=۳\rightarrow x+y+z=۲۱$$

(❋) اعمال روی ماتریس ها

۱ : ندارد.

۲ : الف : نادرست ب : درست

۳ :

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\ ۲&۴&۱\\ ۳&۶&۹\end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix}۲&۰&-۲\\ ۴&۸&۲\\ ۶&۱۲&۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\ ۰&۳&۰\\ ۰&۰&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰&-۲\\ ۴&۸&۲\\ ۶&۱۲&۱۸\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳&۰&۰\\ ۰&-۳&۰\\ ۰&۰&-۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۱&۰&-۱\\ ۴&۵&۲\\ ۶&۱۲&۱۵\end{bmatrix}$$

۴ :

$$A\times B=\begin{bmatrix}x&y\\ ۲&-۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴&۳\\ ۳&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴x+۳y&۳x+۴y\\ ۵&۲\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۴&۳\\ ۳&۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x&y\\ ۲&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴x+۶&۴y-۳\\ ۳x+۸&۳y-۴\end{bmatrix}$$

$$A\times B=B\times A\rightarrow\begin{cases}3x+8=5\rightarrow x=-1\\3y-4=2\rightarrow y=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x & 2 & -y\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=-3+4-2=-1$$

۵ : نادرست

۶ :

$$\begin{bmatrix}3x-6 & -6x+12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=0\rightarrow-3x+6-6x+12=0\rightarrow-9x+18=0\rightarrow x=2$$

۷ :

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=-2I$$

$$A^7=(A^2)^3.A=(-2I)^3.A=-8I^3A=-8IA=-8A=-8\begin{bmatrix}0 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

۸ :

$$A^2=B\rightarrow\begin{bmatrix}5 & 2 & 2\\2 & 2 & -1\\2 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & 2 & 2\\2 & 2 & -1\\2 & -1 & 4a+b\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}a+b=5\\4a+b=5\end{cases}\rightarrow a=0\quad,\quad b=5$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$A\times B=\begin{bmatrix}4 & 2\\b & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -1\\2 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -4+2a\\2b-2 & -b-a\end{bmatrix}$$

و چون در ماتریس قطری باید درایه های غیر واقع بر قطر اصلی صفر باشد، پس :

$-4+2a=0\rightarrow 2a=4\rightarrow a=2$ و $2b-2=0\rightarrow 2b=2\rightarrow b=1$

۱۱ :

$$[x \quad ۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ \to [x-۳ \quad ۱۲]\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ \to ۳x - ۲۱ = ۰ \to x = ۷$$

۱۲ : ندارد.

۱۳ : نادرست

۱۴ :

$$[۲x \quad ۴x-۲] = [۴ \quad y-۲] \to \begin{cases} ۲x = ۴ \to x = ۲ \\ ۴x - ۲ = y - ۲ \to y = ۸ \end{cases}$$

۱۵ :

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۲ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} ۲a - ۸ = ۰ \to ۲a = ۸ \to a = ۴ \\ b - ۳ = ۰ \to b = ۳ \end{cases}$$

۱۶ : درست

۱۷ :

$$\begin{cases} m - ۲ = ۰ \\ n + ۱ = ۰ \end{cases} \to m = ۲ \quad , \quad n = -۱$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

۱۸ : نادرست

۱۹ :

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} -۸ + ۲a = ۰ \to a = ۴ \\ b - ۳ = ۰ \to b = ۳ \end{cases}$$

درس۲ : وارون ماتریس و دترمینان

(*) دترمینان

۱ :

$$||A|.A|=|-۲A|=(-۲)^{۳}|A|=-۸\times(-۲)=۱۶$$

۲ :

$$|A|=۲(۴-۳)=۲\rightarrow|A^{۳}|=|A|^{۳}=۸$$

۳ : درایه های روی قطر اصلی

۴ :

$$|\frac{۱}{|A|}.A|=|\frac{۱}{۲}A|=(\frac{۱}{۲})^{۳}|A|=\frac{۱}{۸}\times۲=\frac{۱}{۴}$$

۵ : ۳۰-

۶ :

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۱۰ & ۱۱ \\ ۱۹ & ۵ & ۴۲ \end{bmatrix}$$

$$|B|=۲(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ \end{vmatrix}+۱(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}+۰(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$=۲(۱۵)-۱(-۹)+۰(-۶)=۳۹$$

۷ : ۸-

۸ :

$$BA=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۱ & ۱۷ & ۸\end{bmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۱۷ & ۸\end{vmatrix}+۱(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۸\end{vmatrix}+-۱(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ ۱ & ۱۷\end{vmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱۰)-۱(-۱۰)-۱(-۲۰)=-۳۰+۱۰+۲۰=۰$$

۹ : درست

۱۰ :

$$\begin{cases}m-۲=۰\\ n+۱=۰\end{cases}\rightarrow m=۲\ ,\ \ n=-۱$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲\\ n+۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\rightarrow |A|=۲$$

$$\rightarrow B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\rightarrow |B|=۲(-۱)-۱(۷)+۱(-۲)=-۱۱$$

$$|A|+|B|=۲+(-۱۱)=-۹$$

۱۱ : ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم. در اینجا این محاسبه را به روش ساروس انجام می دهم.

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۲\\ -۴ & ۴ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۲\\ -۴ & ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$

$$|A|=(-۱)(۲)(۵)+(۰)(۲)(-۴)+(۰)(۰)(۴)-(۰)(۲)(-۴)-(۰)(۰)(۵)-(-۱)(۲)(۴)$$

$$\rightarrow |A|=-۱۰+۸=-۲$$

$$||A|A|=|-۲A|=(-۲)^{۳}|A|=(-۸)\times(-۲)=۱۶$$

۱۲: $\frac{۵}{۸}$

۱۳:

$$|A|=۲\begin{vmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix}=۲\times ۱۰=۲۰$$

$$|B|=۳\begin{vmatrix}-۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{vmatrix}=۳\times(-۲)=-۶\rightarrow |B^{۲}|=|B|^{۲}=۳۶$$

$$|A|+|B^{۲}|=۲۰+۳۶=۵۶$$

۱۴:

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\rightarrow A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}$$

$$mA+۲I_{۲}=m\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴m\\ ۲m & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & ۰\\ ۰ & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & ۴m\\ ۲m & m+n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}n=۸\\ m=۱\end{cases}$$

۱۵:

$$|A|=(۴-۹-۴)-(-۴-۱۲+۳)=-۹+۱۳=۴$$

$$|B|=-۶$$

$$|A+B|+|۲I_{۳}|=|A|\times|B|=۸|I|=(۴)(-۶)+۸=-۲۴+۸=-۱۶$$

۱۶: ۸

۱۷:

الف : خیر، زیرا دو ماتریس هم مرتبه نیستند.

ب :

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۴ & -۲\\ -۴ & ۶ & -۴\\ -۸ & ۱۱ & -۶\end{bmatrix}\rightarrow |A\times B|=۰$$

(❋) وارون ماتریس

۱ : غیر صفر

۲ :

$$|A|=0 \rightarrow 2m-4=0 \rightarrow m=2$$

۳ : ۶-

۴ : الف : گیریم که $|A|=d$ باشد. در این صورت :

$$d=5d-24 \rightarrow d=6$$

ب :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

۵ : فرض کنید که $|A|=d$ باشد. در این صورت :

$$2A=\begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix} \rightarrow 2A=\begin{bmatrix} d & -4 \\ 1 & d \end{bmatrix} \rightarrow |2A|=\begin{vmatrix} d & -4 \\ 1 & d \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow 2|A|=d^{2}+4 \rightarrow 2d=d^{2}+4 \rightarrow d^{2}-2d+4=0 \rightarrow (d-2)^{2}=0 \rightarrow d=2$$

$$\rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{2}$$

۶ :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-1}|=8$$

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^{*}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(❋) حل دستگاه معادلات

۱ :

$$\begin{vmatrix} m-3 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow (m-3)(m+1)-12 \neq 0 \rightarrow m \neq 5 \,, m \neq -3$$

$m \in R - \{۵, -۳\}$

۲ :

$$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \to m(m+۴) - ۱۲ = ۰ \to \begin{cases} m = -۶ \\ m = ۲ \end{cases}$$

که $m = -۶$ قابل قبول نیست.

۳ : نادرست

۴ :

$$\begin{cases} ۳x + ۲y = ۴ \\ x - y = ۳ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = (۳)(-۱) - (۱)(۲) = -۳ - ۲ = -۵$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} A^{*} = \frac{۱}{-۵} \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-۱}D \to X = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۵} + \frac{۶}{۵} \\ \frac{۴}{۵} + \frac{-۹}{۵} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۲ \quad , \quad y = -۱$$

۵ : نادرست

۶ :

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = (۳)(۲) - (-۱)(-۴) = ۶ - ۴ = ۲$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۲} & \frac{۴}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}D\rightarrow X=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+۲\\ \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=۳\quad ,\quad y=۲$$

۷:

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\longrightarrow |A|=۱۳\neq ۰$$ لذا دستگاه دارای جواب است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\rightarrow x=۳\quad ,\quad y=۲$$

۸:

$$\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+x & ۴+۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=۴+۲x+۴+۲x=۰\rightarrow x=-۲$$

۹:

$$\frac{۲m}{۲}\neq\frac{۳}{-۱}\rightarrow m\neq -۳$$

$$A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-۱۰\neq ۰$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=-۱\end{cases}$$

۱۰ : دستگاه مورد انتظار مسئله به صورت زیر است.

$$\begin{cases} ۳x-۵y=۱ \\ ۴x+۲y=۱۰ \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \to |A|=(۳)(۲)-(-۵)(۴)=۶+۲۰=۲۶$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \to x=۲ \quad , \quad y=۱$$

۱۱ : نادرست

۱۲ :

الف :

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix}=۰ \to ۶+۲m=۰ \to m=-۳$$

ب :

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \to \begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۱۳ :

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases} \xrightarrow{A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}} |A|=۳+۱۰=۱۳$$ دستگاه دارای جواب است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$\to X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} -۱+۴۰ \\ ۲+۲۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \to x=۳ \ , \ y=۲$$

۱۴ :

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \to |A| = ۳+۸=۱۱$$ دستگاه جواب دارد.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\to\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۱۵:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\to\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳}\to m(m-۱)=۲\to\begin{cases} m=-۱ \\ m=۲ \end{cases}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل دوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : آشنایی با مقاطع مخروطی

(❋) مقاطع مخروطی

۱ : نادرست

۲ : درست

۳ : درست

۴ : نقطه

۵ : بیضی

۶ : خط

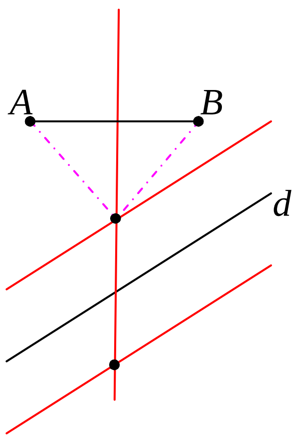
۷ : نادرست

(❋) مکان هندسی

۱ : نادرست

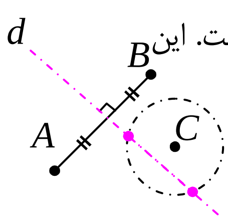
۲ : ویژگی مشترک

۳ : بیضی



۴ : مکان هندسی نقاط که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر در دو طرف آن هستند. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' خطوط موازی d جواب مسئله است.

بحث : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله د جواب دارد. اگر l با دو خط d' و d'' موازی باشد، مسئله جواب ندارد. اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد. مسئله بیشمار جواب دارد.



۵ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را خط d می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز C و شعاع۳ سانتی متر است. این دایره را رسم می کنیم. محل برخورد دایره و خط d جواب مسأله است.

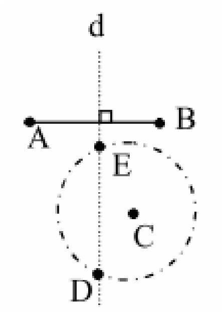
بحث :

اگر خط d دایره را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر خط d دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۶ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی۳ واحد است، دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف d و دایره جواب مسئله است که در شکل مقابل نقاط D و E می باشند. حال اگر خط عمود منصف d و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند، مسئله یک جواب و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسئله جواب ندارد.



۷ : درست

۸ : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را d می نامیم و مکان هندسی نقاطی که اط دو نقطه‌ی C و D به یک فاصله باشد. عمود منصف پاره خط CDدر

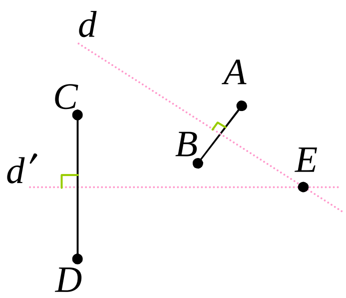
است. این خط را d' می نامیم. بنابراین نقطه‌ی برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه‌ی E)

بحث :

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بیشمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.



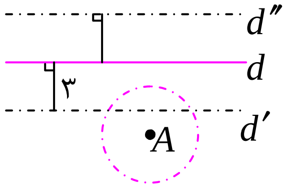
۹ : درست

۱۰ : الف : درست ب : درست

۱۱ : درست

۱۲ : مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله‌ی سانتی متر باشند، یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی متر است.

این دایره را رسم می کنیم. نقاطی که از d به فاصله‌ی۳ سانتی متر باشد، دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به موازات d است، این دو خط را رسم می کنیم، محل برخورد d' و d'' با دایره، مطابق شکل جواب مسأله است.



اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسأله ۲ جواب دارد.

اگر یکی دو از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

اگر هیچ یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۱۳ : نادرست

۱۴ : مشترک

❋❋❋

درس۲ : دایره

(❋) دایره

۱ : $O\left|\begin{array}{l}\dfrac{۴+(-۲)}{۲}=۱\\ \dfrac{-۱+۱}{۲}=۰\end{array}\right. \rightarrow O(۱,۰)$ مرکز دایره

طول شعاع دایره $r=\dfrac{AB}{۲}=\dfrac{\sqrt{۶^۲+۲^۲}}{۲}=\dfrac{۲\sqrt{۱۰}}{۲}=\sqrt{۱۰}$

معادله‌ی دایره $(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=(\sqrt{۱۰})^۲ \rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۱۰$

۲ :

$a^۲+b^۲-۴c>۰ \rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰ \rightarrow ۴a<۳۴ \rightarrow a<\dfrac{۱۷}{۲}$

۳ :

$O(۰,۰)$ و $O'(۱,۰)$ و $r=۲$ و $r'=\sqrt{۵}$

طول خط المرکزین $OO'=\sqrt{(۱)^۲+(۰)^۲}=۱$

$\left.\begin{array}{l} r+r'=\sqrt{۵}+۲\\ |r-r'|=\sqrt{۵}-۲\end{array}\right\} \rightarrow |r-r'|<OO'<r+r' \rightarrow$ دو دایره متقاطع می باشند.

۴:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \to \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \to O(۲,-۱)$$

شعاع دایره $R=\dfrac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\dfrac{۱۰}{۵}=۲$

معادله‌ی دایره $\to (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$

۵:

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳ \to O\left| \begin{array}{l} \alpha=۱ \\ \beta=۱ \end{array} \right.$$

$$m_{OA}=\dfrac{۳-۱}{۲-۱}=۲ \to m'=-\dfrac{۱}{۲}$$

معادله‌ی خط مماس $\to y-۳=-\dfrac{۱}{۲}(x-۲)$

۶:

$$x^۲+y^۲=۱ \to \begin{cases} O_۱(۰,۰) \\ R_۱=۱ \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \to \begin{cases} O_۲(-\dfrac{a}{۲},-\dfrac{b}{۲}) \to O_۲(۳,۱) \\ R_۲=\dfrac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\dfrac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۳۶}=۱ \end{cases}$$

$$d=O_۱O_۲=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

و چون $d>R_۱+R_۲$ لذا دو دایره متخارج هستند.

۷:

اندازه‌ی شعاع دایره $r=OM=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۱-۳)^۲}=۵$

معادله‌ی دایره $(x+۲)^۲+(y-۳)=۲۵$

۸ : چون ۲ $x^{2}+y^{2}=2$ معادله ی دایره است. پس $O(0,0)$ مرکز دایره و $r=\sqrt{2}$ اندازه‌ی شعاع آن است.

$$\xrightarrow{x+y-2=0} d=\frac{|1(0)+1(0)-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\rightarrow r=d$$

خط بر دایره مماس است.

۹ : نادرست

۱۰ :

$$(x+1)^{2}+(y-2)^{2}=9\rightarrow O'(-1,2)\quad ,\ r'=3$$

$$d=OO'=\sqrt{3^{2}+4^{2}}=5\xrightarrow{d=r+r'} r+r'=5\xrightarrow{r'=3} r=2$$

$(x-2)^{2}+(y+2)^{2}=4$ معادله‌ی دایره‌ی مطلوب

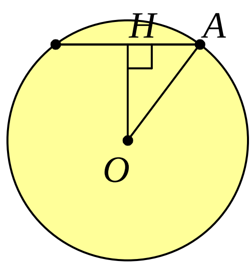
۱۱ :

$$(x-2)^{2}+(y+2)^{2}=1\rightarrow O(2,2)\quad ,\quad r=1$$

$d=\dfrac{|3(2)+2|}{\sqrt{(3)^{2}+(1)^{2}}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}\rightarrow d>r$ خط و دایره نقطه‌ی برخورد ندارند.

۱۲ :

$$OH=\frac{|2(-1)+1(-1)-2|}{\sqrt{(2)^{2}+(1)^{2}}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



$$\Delta(AOH):\xrightarrow{\angle H=90^\circ} OH^{2}+AH^{2}=OA^{2}\rightarrow(\sqrt{5})^{2}+(2)^{2}=R^{2}\rightarrow R=3$$

$$\rightarrow(x+1)^{2}+(y+1)^{2}=9$$

۱۳ : ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می آوریم.

$$x^{2}+y^{2}-2x+2y=0\rightarrow\begin{cases}O(1,-1)\\ R=\sqrt{2}\end{cases}$$

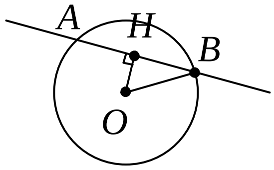
$$OA=1\rightarrow OA<R$$

لذا نقطه‌ی داده شده ، داخل دایره است.

۱۴ : برای نوشتم معادله ی دایره ، به مختصات مرکز دایره و اندازه ی شعاع دایره نیاز است.

در اینجا مختصات مرکز دایره را داریم. اما برای تعیین اندازه‌ی شعاع دایره کافی است از مثلث قائم الزاویه‌ی OBH کمک بگیریم. طبق قضایای هندسه می دانیم که اگر از مرکز دایره بر وتر عمودی رسم کنیم، آن وتر نصف می شود.

پس :



$$BH = \frac{AB}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

برای محاسبه‌ی اندازه‌ی OH کافی است، فاصله‌ی مرکز دایره را تا خط $x + y = ۲$ به دست آوریم.

$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱(۱) + ۱(۱) - ۲|}{\sqrt{(۱)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{|۱(۰) + ۱(۱) - ۲|}{\sqrt{(۱)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

لذا :

$$\Delta(OBH) : OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \xrightarrow{OB=R} R^۲ = (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = \frac{۵}{۲}$$

در نهایت معادله‌ی دایره را به شکل زیر می نویسیم.

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \to (x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

۱۵ :

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{a=-۲, b=۰, c=-۴} \begin{cases} O_۱(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) \to O_۱(-۱, ۰) \\ R_۱ = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۰ + ۱۶} = \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ = ۴ \to \begin{cases} O_۲(۰, ۰) \\ R_۲ = ۲ \end{cases}$$

$d = O_۱O_۲ = \sqrt{(-۱-۰)^۲ + (۰-۰)^۲} = ۱$ طول خط المرکزین

$$R_۱ + R_۲ = \sqrt{۵} + ۲$$

$$R_1 - R_2 = \sqrt{5} - 2$$

$$\sqrt{5} - 2 < 1 < \sqrt{5} + 2 \rightarrow R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$$

پس یعنی دو دایره متقاطع هستند.

۱۶ : نادرست

۱۷ :

شعاع دایره $R = \dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|4(3) + 3(1) + 5|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \dfrac{20}{5} = 4$

معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

۱۸ :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = -3$$

$$\rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -3 + 1 + 4 \rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$$

مختصات مرکز دایره $O(1,-2)$ اندازه‌ی شعاع دایره $R = \sqrt{2}$

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده را تعیین نموده و اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه می کنیم.

$$D = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (-1)(-2) + (-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1 + 2 - 1}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

و چون $D = R$ پس خط داده شده بر دایره مماس است.

۱۹ :

$$x^2 - 8x + y^2 + 4y = -16 \rightarrow (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 4y + 4) = -16 + 16 + 4$$

$\rightarrow (x-4)^2 + (y+2)^2 = 4$ معادله‌ی دایره

$O'(4,2)$ مختصات مرکز دایره $R' = \sqrt{4} = 2$ اندازه‌ی شعاع دایره

$OO' = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ طول خط المرکزین

$$|R-R'|=OO' \rightarrow |R-۲|=۵ \rightarrow \begin{cases} R=۷ \\ R=-۳ \end{cases}$$

$R=-۳$ غیر قابل قبول است. لذا معادله‌ی دایره‌ی مماس می شود.

معادله‌ی دایره‌ی مطلوب $(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=۴۹$

۲۰ : نادرست

۲۱ :

شعاع دایره $\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{x=۲\,,\quad y=-۱} R=\dfrac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\dfrac{۱۰}{۵}=۲$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع دایره برابر $R=۲$ است و لذا معادله‌ی دایره می شود،

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

۲۲ :

$$(x-۱)^۲+y^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} O_۱(۱,۰) \\ R_۱=۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad x^۲+(y-۱)^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} O_۲(۰,۱) \\ R_۲=۱ \end{cases}$$

فاصله‌ی دو مرکز برابر $O_۱O_۲=\sqrt{۲}$ و $R_۱+R_۲=۲$ و $R_۱-R_۲=۰$

$$|R_۱-R_۲|<O_۱O_۲<R_۱+R_۲$$

بنابراین دو دایره‌ی متقاطع اند.

۲۳ : فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با :

شعاع دایره $R=\dfrac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{(۳)^۲+(۴)^۲}}=\dfrac{۱۵}{۵}=۳$

معادله‌ی دایره $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲ \rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$

۲۴ :

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \rightarrow (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱ \rightarrow \begin{cases} O(۳,۱) \\ R=۱ \end{cases}$$

$$x^{۲}+y^{۲}=۱\rightarrow\begin{cases}O'(۰,۰)\\ R'=۱\end{cases}$$

اندازه‌ی خط المرکزین $d=OO'=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$

$$R+R'=۱+۱=۲$$

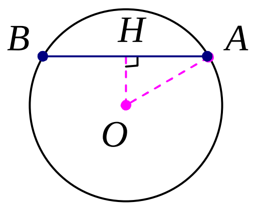
$$\rightarrow d>R+R'$$

لذا دو دایره بیرون یکدیگرند(متخارج)

۲۵ : نادرست

۲۶ : از مرکز دایره بر وتر عمود می کنیم. عمود OH وتر AB را نصف می کند.

$$OH=\frac{|(۱)(۰)+(۱)(۱)+(-۲)|}{\sqrt{(۱)^{۲}+(۱)^{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



$$OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}\rightarrow OA^{۲}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}\rightarrow OA^{۲}=\frac{۱۰}{۴}\rightarrow R^{۲}=\frac{۱۰}{۴}$$

معادله‌ی دایره $(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=\frac{۱۰}{۴}$

۲۷ :

مختصات مرکز دایره $O(۱,۱)$

شیب AO $m=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

شیب خط مماس بر دایره گذرا از A $m'=-\frac{۱}{m}=-\frac{۱}{۲}$

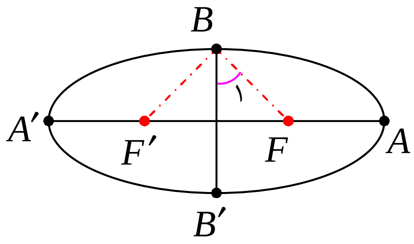
معادله‌ی خط مماس $y=m(x-x_A)+y_A\rightarrow y=-\frac{۱}{۲}(x-۲)+۳$

❋❋❋

درس۳ : بیضی و سهمی

(❋) بیضی

۱ :



$$a=۲b\to c^۲=a^۲-b^۲=۴b^۲-b^۲=۳b^۲\to c=\sqrt{۳}b$$

$$\tan B_۱=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳}\to B_۱=۶۰^\circ\to FBF'=۲\times ۶۰=۱۲۰^\circ$$

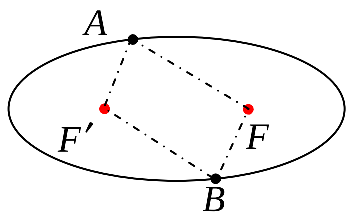
۲ : دایره

۳ :

$$\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}\to c=\frac{۳}{۵}a\ \ ,\ \ b=۸\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}a^۲=۶۴+\frac{۹}{۲۵}a^۲\to a=۱۰\ ,\ c=۶$$

لذا طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله‌ی کانونی ۱۲ می باشند.

۴ : دو نقطه‌ی A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$AF+AF'=۲a\qquad (۱)$$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی

$$BF+BF'=۲a\qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می شود: $AF=BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ متوازی الاضلاع است و چون در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبرو موازی اند،

پس : $AF\parallel BF'$

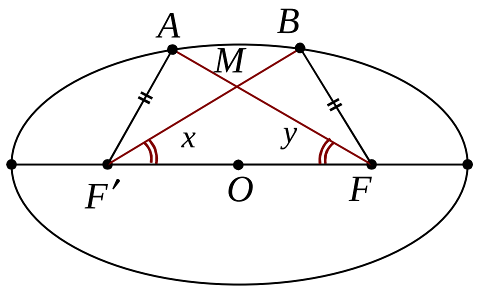
۵ :

$$AA'=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۱۲+۸)^۲}=۲۰\xrightarrow{AA'=۲a}۲a=۲۰\to a=۱۰$$

$$e=\frac{c}{a}\xrightarrow{e=\frac{۳}{۵}}\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{a=۱۰}\frac{c}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\rightarrow c=۶$$

$$FF'=۲c\xrightarrow{c=۶}FF'=۱۲$$ فاصله‌ی کانونی

۶:



$$\left.\begin{array}{r}AF+AF'=۲a\\BF+BF'=۲a\\BF=AF'\end{array}\right\}\rightarrow AF=BF'$$

$$\left.\begin{array}{r}AF=BF'\\AF'=BF\\FF'=FF'\end{array}\right\}\xrightarrow{\hspace{3cm}}\Delta(AFF')\cong\Delta(BFF')\rightarrow \angle x=\angle y$$

(ض ض ض)

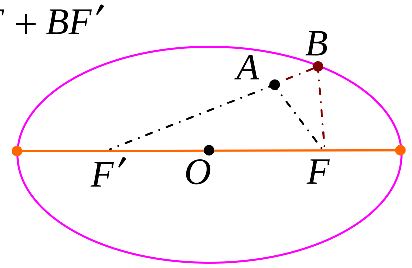
پس مثلث FMF' دو زاویه‌ی مساوی دارد، لذا متساوی الساقین است.

۷: چون نقطه‌ی A درون بیضی باشد. در این صورت امتداد AF (یا AF') بیضی را در نقطه ای مانند B قطع می کند. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می توان نوشت:

$$AF<AB+BF\xrightarrow{+AF'}AF+AF'<AF'+AB+BF$$

$$\rightarrow AF+AF'<\underbrace{AF'+AB}_{BF'}+BF\rightarrow AF+AF'<BF+BF'$$

$$\xrightarrow{BF+BF'=۲a}AF+AF'<۲a$$



۸:

$$\begin{cases}۲a=۱۰\rightarrow a=۵\\ ۲b=۶\rightarrow b=۳\end{cases}\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲}c=۴$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

۹ : درست

۱۰ :

$$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۲۵-۹=۱۶\rightarrow c=۴$$

$$FF'=۲c=۲(۴)=۸$$

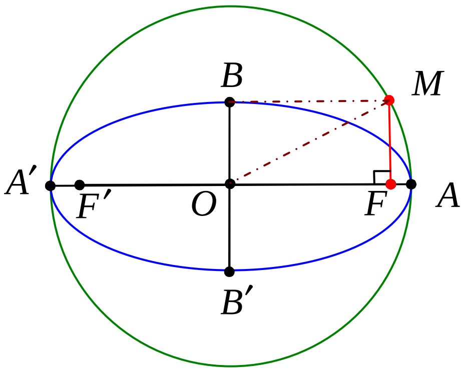
$$MF+MF'=۲a=۱۰\rightarrow MF'=۱۰-MF$$

$$(MF)^{۲}+(MF')^{۲}=(FF')^{۲}\rightarrow (MF)^{۲}+(۱۰-MF)^{۲}=(۸)^{۲}\rightarrow MF=۵\pm\sqrt{۷}$$

۱۱ : بیرون

۱۲ : نادرست

۱۳ : طبق مسئله $OM=OA=a$ می باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OMA می توان نوشت:



$$OM=OA=a$$

$$OF=c$$

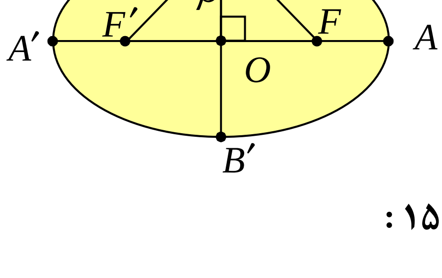
$$OM^{۲}=OF^{۲}+MF^{۲}$$

$$\rightarrow a^{۲}=c^{۲}+MF^{۲}\rightarrow MF^{۲}=a^{۲}-c^{۲}\xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}}MF^{۲}=b^{۲}\rightarrow MF=b$$

۱۴ :

$$۲a=\sqrt{۲}\rightarrow a=b\sqrt{۲}\rightarrow \cos\alpha=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{b\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\rightarrow \alpha=۴۵^{\circ}$$

$$\angle FBF'=۲\times۴۵=۹۰^{\circ}$$



۱۵ :

$$BB'=۲b=۲۴\rightarrow b=۱۲$$

$OF = c = ۵$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to a^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ \to a^۲ = ۱۶۹ \to a = ۱۳$

$e = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۱۳}$

۱۶ : صفر

۱۷ :

قطر بزرگ $AA' = ۲a = ۲۰ \to a = ۱۰$

خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a} \to \frac{۴}{۵} = \frac{c}{۱۰} \to c = ۸$

فاصله‌ی کانونی $FF' = ۲c = ۲ \times ۸ = ۱۶$

رابطه ی طلایی بیضی $a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۱۰۰ = b^۲ + ۶۴ \to b^۲ = ۳۶ \to b = ۶$

طول قطر بزرگ بیضی $BB' = ۲b = ۲ \times ۶ = ۱۲$

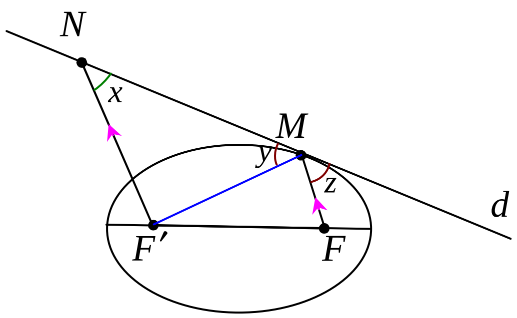
۱۸ : طبق ویژگی خط مماس بر بیضی

داریم، $\angle y = \angle z$ و چون $NF' \parallel MF$

پس $\angle x = \angle z$. لذا $\angle x = \angle y$

یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد،

در نتیجه متساوی الساقین بوده و $NF' = MF'$



۱۹ : $\frac{۱}{۲}$

۲۰ :

$$\left.\begin{matrix} OF = c = ۴ \\ OA = a = ۸ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} ۶۴ = b^۲ + ۱۶ \to b^۲ = ۴۸ \to b = ۴\sqrt{۳}$$

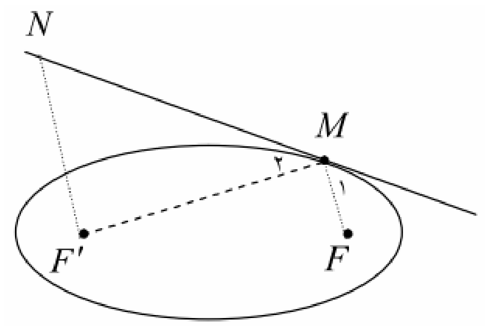
$BB' = ۲b = ۸\sqrt{۳}$ طول قطر کوچک

۲۱ : مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است. بنابه خاصیت کوتاه ترین مسیر، زاویه های $\angle M_۱ = \angle M_۲$.

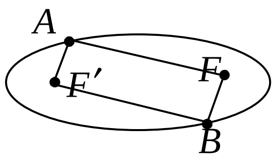
از طرفی چون $MF \parallel NF'$ و d مورب است، پس $\angle N = \angle M_۱$

اکنون از این دو نتیجه می توان نوشت : $\angle N = \angle M_۲$

یعنی مثلث MNF' متساوی الساقین است و لذا : $MF' = NF'$



۲۲ : نقاط A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم.



نقطه‌ی A روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی $AF + AF' = ۲a$

نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی $BF + BF' = ۲a$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF' = BF)$ نتیجه‌ی می شود $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی الاضلاع است، پس $AF \parallel BF'$

۲۳ : دایره

۲۴ : نقطه‌ی B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد. در نتیجه : $BF = BF'$

فاصله‌ی هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF=BF'} BF = BF' = a$$

بنابر رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث BOF داریم : $OF^۲ + OB^۲ = BF^۲$ یعنی $b^۲ + c^۲ = a^۲$

۲۵ :

$$\begin{cases} ۲a=۱۰ \\ ۲b=۶ \end{cases} \rightarrow a=۵\ ,\ \ b=۳ \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c=۴$$

در مثلث MFF' میانه‌ی وارد بر یک ضلع $MO=\frac{۱}{۲}FF'=۴$ نصف ضلع روبرو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم الزاویه است.

$$MF+MF'=۲a=۱۰ \rightarrow MF'=۱۰-MF$$

$$MF^۲+MF'^۲=FF'^۲ \rightarrow MF^۲+(۱۰-MF)^۲=۸^۲ \rightarrow MF=۵-\sqrt{۷}$$

۲۶ : نقطه‌ی A و A' روی بیضی قرار دارند، بنابه تعریف داریم $A'F'+A'F=۲a$ و $AF'+AF=۲a$

نتیجه می گیریم که :

$$A'F'+A'F=AF+AF' \rightarrow A'F'+(A'F'+FF')=AF+(AF+FF')$$

$$\rightarrow A'F'=AF$$

۲۷ :

$$\cos(\angle OBF)=\frac{OB}{BF} \xrightarrow{BF=a\ ,\ OB=b} \cos(\angle OBF)=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\rightarrow \angle OBF=۳۰^\circ \rightarrow \angle F'BF=۲(\angle OBF)=۶۰^\circ$$

۲۸ : پاره خط

(❋) سهمی

۱ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات معلوم می شود که سهمی قائم رو به پایین می باشد و لذا :

پارامتر سهمی $p=۴$

معادله‌ی سهمی $(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادله‌ی خط هادی $y=۶$

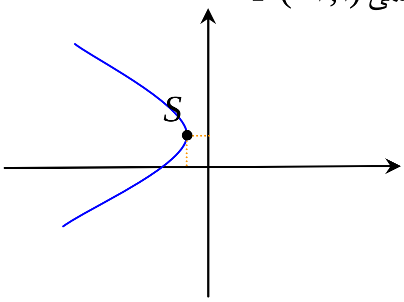
۲ : الف :

$$y^{۲} - ۲y + ۸x + ۹ = ۰ \rightarrow y^{۲} - ۲y + ۱ = -۸x - ۸ \rightarrow (y-۱)^{۲} = -۸(x+۱)$$

$\rightarrow S(-۱,۱)$ رأس سهمی

دهانه‌ی سهمی به سمت چپ و $p = ۲$ ، معادله‌ی خط هادی $x = ۱$ ، کانون سهمی $F(-۳,۱)$

ب : نقاط کمکی $B'(-۳,-۳)$ و $B(-۳,۵)$

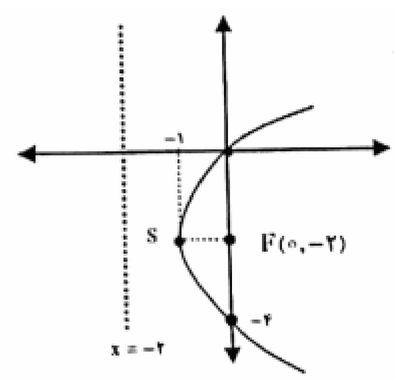


۳ :

$y^{۲} = ۴x - ۴y \rightarrow y^{۲} + ۴y = ۴x + ۴ \rightarrow (y+۲)^{۲} = ۴(x+۱)$ سهمی افقی مثبت

$S(-۱,-۲)$ رأس سهمی $\quad F(۰,-۲)$ کانون سهمی $\quad x = -۲$ خط هادی

نقاط کمکی برای ترسیم $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$



۴ : سهمی

۵ : الف : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی ، دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و $a = ۴$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $(x-۲)^{۲} = -۱۶(y-۳)$

$$-۴p = -۱۶ \rightarrow p = ۴$$

ب : مختصات کانون سهمی برابر $F(\alpha, \beta - p) \rightarrow F(۲,۳-۴) \rightarrow F(۲,-۱)$

۶ :

سهمی افقی مثبت $y^{2}=4(x-1)$

پارامتر سهمی $4p=4\rightarrow p=1$ ، و رأس سهمی $\rightarrow S(1,0)$

کانون سهمی $\rightarrow F(2,0)$

معادله‌ی دایره‌ی مورد اشاره $(x-2)^{2}+y^{2}=9$

$$\begin{cases} y^{2}=4x-4 \\ y^{2}=-x^{2}+4x+5 \end{cases} \rightarrow -x^{2}+4x+5=4x-4 \rightarrow x=\pm 3$$

که پاسخ $x=-3$ غیر ممکن است.

نقاط برخورد سهمی و دایره $\rightarrow \begin{cases} M(3,2\sqrt{2}) \\ M'(3,-2\sqrt{2}) \end{cases}$

۷ : کانون سهمی

۸ :

$$x^{2}-4y+8x=0 \rightarrow x^{2}+8x+16=4y+16 \rightarrow (x+4)^{2}=4(x+4)$$

سهمی قائم و رو بالا است.

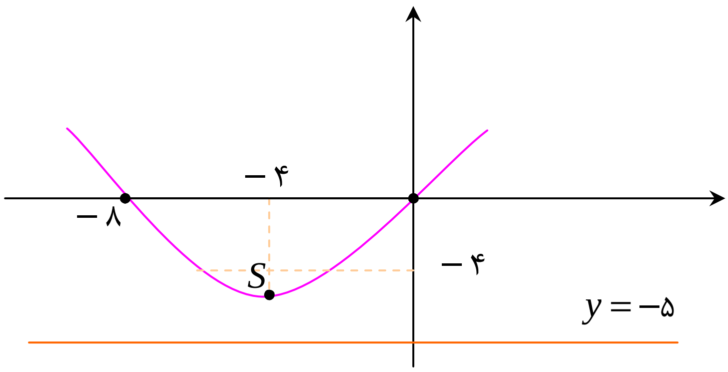
رأس سهمی $S(-4,-4)$

پارامتر سهمی $4p=4\rightarrow p=1$

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p)\rightarrow F(-4,-4+1)\rightarrow F(-4,-3)$

معادله‌ی خط هادی سهمی $y=\beta-p\rightarrow y=-4-1=-5$

نقاط کمکی $y=-3\rightarrow \begin{cases} B(-2,-3) \\ B'(-6,-3) \end{cases}$



۹ :

$y^۲=۴(x-۱)\rightarrow S(۱,۰)\quad , \quad F(۲,۰)$

معادله‌ی دایره $(x-۲)^۲+y^۲=۹$

$$\begin{cases} y^۲=۴x-۴ \\ (x-۲)^۲+y^۲=۹ \end{cases}\rightarrow (x-۲)^۲+۴x-۴=۹=x^۲-۴x+۴+۴x-۴=۹$$

$$\rightarrow x^۲=۹\rightarrow x=\pm۳$$

$$\rightarrow\begin{cases} M(۳,۲\sqrt{۲}) \\ M'(۳,-۲\sqrt{۲}) \end{cases}$$

۱۰:

$$x^۲+۴x=۲y\xrightarrow{+۴}x^۲+۴x+۴=۲y+۴\rightarrow(x+۲)^۲=۲(y+۲)$$

با مشاهده‌ی این معادله ، معلوم می شود که سهمی، قائم رو به بالا است و پارامتر سهمی $p=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

$$۴p=۲\rightarrow p=\frac{۱}{۲}$$

مختصات رأس سهمی هم به صورت $(-۲,-۲)$ است.

مختصات کانون سهمی را هم می توان به صورت زیر تعیین نمود.

کانون سهمی $F(\alpha,\beta+p)\rightarrow F(-۲,-۲+\frac{۱}{۲})\rightarrow F(-۲,-\frac{۳}{۲})$

برای تعیین مختصات نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات یک بار x و یک بار y را برابر صفر قرار می دهیم. لذا

محل برخورد با محور x ها $y=۰\xrightarrow{x^۲=۲y-۴x}x^۲=۲(۰)-۴x\rightarrow x=۰\ ,\ x=-۴$

$$\rightarrow A(۰,۰)\qquad , \qquad B(۰,-۴)$$

محل برخورد با محور y ها $x=۰\xrightarrow{x^۲=۲y-۴x}(۰)^۲=۲y-۴(۰)\rightarrow y=۰\rightarrow C(۰,۰)$

۱۱: نقطه

۱۲ :

$$y^۲ - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰ \rightarrow y^۲ - ۶y + ۹ = -۱۶x - ۱۶ \rightarrow (y-۳)^۲ = -۱۶(x+۱)$$

لذا فرم استاندارد سهمی به صورت $(y-۳)^۲ = -۱۶(x+۱)$ است. سهمی افقی و دهانه‌ی سهمی به سمت چپ باز می شود. رأس سهمی نقطه‌ی $S(-۱,۳)$ است و $p = ۴$ مختصات کانون آن نقطه‌ی

$F(\alpha - p, \beta) = (-۵,۳)$ است. معادله‌ی خط هادی سهمی به صورت $x = p + \alpha = ۳$ است.

۱۳ : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است و $p = ۳$ فرم استاندارد سهمی به صورت:

$$(x-h)^۲ = ۴p(y-k) \rightarrow (x-۴)^۲ = ۱۲(y-۶)$$

۱۴ : $(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱)$

۱۵ : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و $a = ۴$

معادله‌ی سهمی $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$

معادله‌ی خط هادی $y = ۶$

۱۶ : درست

۱۷ : الف : با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $p = ۴$

دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و لذا معادله‌ی سهمی می شود $(x-۲)^۲ = -۴(۴)(y-۳)$

ب : مختصات کانون سهمی می شود $F(۲,-۱)$

۱۸ : اگر قطر دهانه دیش را با $۲b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم. فاصله‌ی کانونی برابر $p = \frac{b^۲}{۴h}$ است. اکنون با توجه به این مسأله داریم :

$$\begin{cases} ۲b = ۶۰ \rightarrow b = ۳۰ \\ h = ۹ \end{cases} \rightarrow p = \frac{۴b^۲}{۱۶h} = \frac{b^۲}{۴h} = \frac{۹۰۰}{۴(۹)} = ۲۵$$

۱۹:

$y^{۲}-۲y+۱=-۸x-۹+۱\to(y-۱)^{۲}=-۸(x+۱)$

سهمی افقی رو به سمت چپ $-۴p=-۸\to p=۲$

مختصات رأس $\to S(-۱,۱)$

مختصات کانون $F(-۳,۱)$

معادله‌ی خط هادی $x=۱$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل سوّم هندسه۳ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس۱ : معرفی فضای سه بعدی

(❋) فضای دو بعدی

(❋) فضای سه بعدی

۱ : درست

۲ : الف : $z=۴$ ب : محور y ها

پ : نقطه‌ی $A(۲,۰,۰)$ و مختصات وسط AB برابر است با $(-۱,۳,-\frac{۳}{۲})$

۳ :

$$\begin{cases} -۱\le x\le ۲ \\ y=۱ \\ z=۳ \end{cases}$$ معادلات مربوط به پاره خط AB

۴ :

$$\|AB\|=\sqrt{(۳-۳)^۲+(-۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۳$$ طول پاره خط AB

$$\begin{cases} x=۳ \\ -۲\le y\le ۱ \\ z=۲ \end{cases}$$ معادلات مربوط به پاره خط AB

۵ :

الف) $A(۰,۴,۳)$

ب) $AD:\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$ و $CDFG:\begin{cases} x=۲ \\ ۰\le y\le ۴ \\ ۰\le z\le ۳ \end{cases}$

۶ : درست

۷ : هر نقطه روی محور x ها، عرض و ارتفاع آن صفر است. پس این معادله نشان دهنده محور x ها است.

معادله‌ی $y=\text{۰}$ یعنی صفحه‌ی xoz می باشد و محور x ها منطبق بر آن است.

۸ :

الف : نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=\text{۰} \\ z=\text{۰} \end{cases}$ در فضای $R^{\text{۲}}$ همان معادله‌ی محور y ها است.

معادله‌ی $x=\text{۰}$ معادله‌ی صفحه‌ی yz که شامل محور y ها است.

ب :

$$\vec{a}+\text{۲}\vec{b}=(\text{۲},-\text{۱},\text{۳})+\text{۲}(\text{۱},\text{۲},\text{۰})=(\text{۴},\text{۳},\text{۳})$$

$$\|\vec{a}+\text{۲}\vec{b}\|=\sqrt{(\text{۴})^{\text{۲}}+(\text{۳})^{\text{۲}}+(\text{۳})^{\text{۲}}}=\sqrt{\text{۱۶}+\text{۹}+\text{۹}}=\sqrt{\text{۳۴}}$$

۹ : نقاط B و A زیرا در این دو نقطه‌ی $y=\text{۲}$ و $z=\text{۱}$ می باشد.

۱۰ : ۶

۱۱ : الف) $b=-\text{۳}$ ب) محور z ها

پ)

$$A(\text{۰},\text{۲},\text{۳}),B(-\text{۴},\text{۶},-\text{۳})\rightarrow\begin{cases} x_M=\dfrac{\text{۰}+(-\text{۴})}{\text{۲}}=-\text{۲} \\ y_M=\dfrac{\text{۲}+\text{۶}}{\text{۲}}=\text{۴} \\ z_M=\dfrac{\text{۳}+(-\text{۳})}{\text{۲}}=\text{۰} \end{cases}\rightarrow M(-\text{۲},\text{۴},\text{۰})$$

۱۲ :

الف) $A(\text{۲},\text{۰},\text{۰})$ و $B(\text{۱},\text{۰},\text{۳})$

ب) $\|AB\|=\sqrt{(\text{۲}-\text{۱})^{\text{۲}}+(\text{۰}-\text{۰})^{\text{۲}}+(\text{۰}-\text{۳})^{\text{۲}}}=\sqrt{\text{۱۰}}$

پ) $M(\frac{\text{۲}+\text{۱}}{\text{۲}},\frac{\text{۰}+\text{۰}}{\text{۲}},\frac{\text{۰}+\text{۳}}{\text{۲}})=(\frac{\text{۳}}{\text{۲}},\text{۰},\frac{\text{۳}}{\text{۲}})$

❋❋❋

(❋) بردار ها

۱ :

$$\vec{a}=(۳,۲,-۱)$$

$$r\vec{b}-\vec{a}=۲\vec{b}-\vec{a}=۲(۳,۱,-۱)-(۳,۲,-۱)=(۶,۲,-۲)+(-۳,-۲,۱)=(۳,۰,-۱)$$

۲ :

$$\vec{a}-۲\vec{b}=(۲,۰,-۱)-(۲,۴,۲)=(۰,-۴,-۳)\rightarrow\|\vec{a}-۲\vec{b}\|=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

۳ :

$$\vec{a}=(۰,۲,-۳)$$

$$\vec{c}=۲\vec{b}-\vec{a}=۲(۰,۱,-۱)-(۰,۲,-۳)=(۰,۲,-۲)+(۰,-۲,۳)=(۰,۰,۱)$$

۴ : موازی

۵ :

$$\vec{b}=-۶\vec{j}+۸\vec{k}=(۰,-۶,۸)$$

$$r\vec{b}=-\frac{۱}{۲}(۰,-۶,۸)=(۰,۳,-۴)\rightarrow\|r\vec{b}\|=\sqrt{(۰)^۲+(۳)^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{۰+۹+۱۶}=۵$$

$$r\vec{a}=-\frac{۱}{۲}(\sqrt{۸},۲,۴)=(-\sqrt{۲},-۱,-۲)$$

$$r\vec{a}+\vec{b}=(-\sqrt{۲},-۱,-۲)+(۰,-۶,۸)=(-\sqrt{۲},-۷,۶)$$

۶ : الف: بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی ۵ واقع است.

ب :

$$۲\vec{a}-\vec{b}=۲(۱,۲,-۱)-(۰,۲,-۱)=(۲,۲,-۱)$$

$$\rightarrow\|۲\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$$

۷ : yoz

❋❋❋

درس۲: ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار

(❋) ضرب داخلی و خواص آن

۱:

$$\vec{a}.\vec{b}=۰\leftrightarrow \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=۰\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq ۰}\cos\theta=۰\leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

۲: صفر ($\vec{a}.\vec{b}=۰$)

۳: برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می توان نوشت، $\|\vec{a}\|\geq ۰$ و $\|\vec{b}\|\geq ۰$ و لذا $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\geq ۰$

از طرفی برای زاویه‌ی θ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $-۱\leq\cos\theta\leq ۱$ برقرار است. این نامساوی را می توان به صورت $|\cos\theta|\leq ۱$ نیز نوشت. اکنون دو طرف این نامساوی را در عدد نامنفی $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ ضرب می کنیم. خواهیم داشت:

$$\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times|\cos\theta|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times ۱$$
$$\rightarrow|\vec{a}.\vec{b}|\leq\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

۴:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=(m)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=m+۱$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(m)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{m^۲+۱+۴}=\sqrt{m^۲+۵}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}\times\sqrt{۲}}\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}\times\sqrt{۲}}$$

$$\to ۱=\frac{m+۱}{\sqrt{m^۲+۵}}\to m+۱=\sqrt{m^۲+۵}\to m^۲+۲m+۱=m^۲+۵$$

$$\to ۲m=۴\to m=۲$$

۵ : صفر

۶ : گیریم که $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ پس :

$$\vec{a}.\vec{a}=a_۱a_۱+a_۲a_۲+a_۳a_۳=a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=\|\vec{a}\|^۲$$

۷ : نادرست

۸ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۰)(۲)+(۱)(-۱)+(۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(۰)^۲+(-۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\theta=۴۵^\circ$$

۹ :

$$\vec{a}.\vec{b}=\circ\to\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=\circ\xrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq\circ}\cos\theta=\circ\to\theta=\frac{\pi}{۲}$$

۱۰ : نادرست

۱۱ :

$$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^۲=\|\vec{o}\|^۲\to\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^۲=۰$$

$$\longrightarrow\|\vec{a}\|^۲+\|\vec{b}\|^۲+\|\vec{c}\|^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$$
$$\to ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰\to\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=-۷$$

❋❋❋

(❋) تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر

۱ :

$$\vec{u}=\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)\rightarrow\|\vec{u}\|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=\sqrt{۴۹}=۷$$

$$\vec{a}.\vec{u}=(-۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۰)(۶)=-۲+۹+۰=۷$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^۲}\vec{u}=\frac{۷}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)=(\frac{۲}{۷},-\frac{۳}{۷},\frac{۶}{۷})$$

۲ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۱)(-۲)+(-۳)(۱)+(۲)(-۵)=-۲-۳-۱۰=-۱۵$$

$$\|\vec{b}\|^۲=(-۲)^۲+(۱)^۲+(-۵)^۲=۴+۱+۲۵=۳۰$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{-۱۵}{۳۰}(-۲,۱,-۵)=\frac{-۱}{۲}(-۲,۱,-۵)=(۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۲})$$

۳ :

$$\vec{a}.\vec{b}=(۵)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۵+۱+۰=۶$$

$$\|\vec{b}\|^۲=(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲=۱+۱+۰=۲$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{۶}{۲}(۱,-۱,۰)=۳(۱,-۱,۰)=(۳,-۳,۰)$$

۴ :

$$\vec{a}=r\vec{b}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=r.\vec{b}.\vec{b}=r\|\vec{b}\|^۲$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{r\|\vec{b}\|^۲}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=r\vec{b}=\vec{a}$$

۵ : الف :

$$\vec{a}.\overleftarrow{b}=(۱)(-۲)+(۲)(۰)+(۳)(۲)=-۲+۰+۶=۴$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^۲+(۰)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۴+۰+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{۴}{۸}(-۲,۰,۲)=(-۱,۰,۱)$$

ب :

$$۲\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{a}+(-\vec{b})=۲(۱,۲,۳)+(۲,۰,-۲)=(۲,۴,۶)+(۲,۰,-۲)=(۴,۴,۴)$$

$$\|۲\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{(۴)^{۲}+(۴)^{۲}+(۴)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۱۶+۱۶}=\sqrt{۴۸}=۴\sqrt{۳}$$

۶:

$$\vec{a}.\vec{b}=(-۲)(۰)+(۰)(۲)+(۲)(۲)=۴$$

$$\vec{a}=(-۲,۰,۲)\rightarrow\|\vec{a}\|=\sqrt{۴+۰+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\vec{b}=(۰,۲,۲)\rightarrow\|\vec{b}\|=\sqrt{۰+۴+۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۴}{۲\sqrt{۲}\times۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\theta=۶۰^{\circ}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲)=(-۲,۲,۴)$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}=(-۲)(۰)+(۲)(۲)+(۴)(۲)=۴+۸=۱۲$$

$$(a+b)'=\frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}=\frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲)=(۰,۳,۳)$$

۷:

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\vec{b}=\frac{۲+۱+۰}{۱+۱+۰}(۱,-,۰)=\frac{۳}{۲}(۱\,,-۱\,,۰)$$

۸:

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=(۳,-۴,۲)+(-۱,۱,۴)=(۲,-۳,۶)$$

$$\vec{a}.\vec{d}=(۱)(۲)+(-۳)(-۳)+(۴)(۶)=۲+۹+۲۴=۳۵$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{\|\vec{d}\|^{۲}}\vec{d}=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$$

۹:

$$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^{۲}+(-۱)^{۲}+(۰)^{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$$

❋❋❋

(❋) ضرب خارجی دو بردار

۱:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta\rightarrow ۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}=\pm\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}}=\pm\frac{۵}{۱۳}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$$

۲: کافی است یکی از دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۳ & ۲\\ ۱ & -۵\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۵ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۳\\ -۲ & ۱\end{vmatrix})=(۱۳,۱,-۵)$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(\begin{vmatrix}۱ & -۵\\ -۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۵ & -۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۱ & -۳\end{vmatrix})=(-۱۳,-۱,۵)$$

۳:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\leftrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=۰$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|,\|\vec{b}\|\neq 0} \sin\theta = 0 \leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

۴ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta \to 12 = 8\times 3\times\sin\theta \to \sin\theta = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta = 8\times 3\times(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pm 12\sqrt{3}$$

۵ : درست

۶ :

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k}) = \vec{i}.\vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$$

۷ :

$$\vec{k}.(\vec{i}\times\vec{j}) = \vec{k}.\vec{k} = \|\vec{k}\|^2 = 1$$

۸ : الف : بردار $\vec{a}$ در ناحیه‌ی چهارم است.

ب :

$$\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-2,1,-1)$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (3,-2,1) + 2(-2,1,-1) = (-1,0,-1) \to \|\vec{a}+2\vec{b}\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

ج :

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}) = (1,1,-1)$$

۹ : نادرست

۱۰ :

$$\vec{a}\parallel\vec{b} \xrightarrow{\exists r\in R} \vec{b} = r\,\vec{a} \to (b_1,b_2,b_3) = (ra_1,ra_2,ra_3)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} ra_۲ & ra_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ra_۳ & ra_۱ \\ b_۳ & b_۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ra_۱ & ra_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix})=(\begin{vmatrix} b_۲ & b_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_۳ & b_۱ \\ b_۳ & b_۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix})$$

$$=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

اثبات برعکس این مطلب هم می توان به شکل زیر نوشت :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۰$$

$$\xrightarrow{\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta}\sin\theta=۰\rightarrow\theta=۰\quad or\quad\pi$$

لذا $\vec{a}\parallel\vec{b}$

۱۱ :

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix})=(۲,۲,-۱)$$

۱۲ : صفر

۱۳ : درست

۱۴ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\leftrightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{o}\|\leftrightarrow\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\sin\theta=\circ$$

$$\xleftrightarrow{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\neq۰}\sin\theta=\circ\rightarrow\theta=\circ\quad or\quad\theta=\pi\leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

۱۵ : درست

۱۶ :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=\|\vec{a}\|^۲\|\vec{b}\|^۲$$

$$\rightarrow(۷۲)^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=(۳)^۲(۲۶)^۲\rightarrow(\vec{a}.\vec{b})^۲=۹۰۰$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\pm۳۰\xrightarrow{\theta<۰}\vec{a}.\vec{b}=۳۰$$

❋❋❋

(❋) مساحت متوازی الاضلاع و حجم متوازی السطوح

۱ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۱,-۱,۱)$$

$$S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

۲ :

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(۸,-۷,-۵)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۸)+(m)(-۷)+(-۱۱)(-۵)=۸-۷m+۵۵=۰\rightarrow m=۹$$

۳ :

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوّم :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+(\vec{a}.\vec{b})^۲=\|\vec{a}\|^۲\|\vec{b}\|^۲\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+(۱۲)^۲=(۴)^۲(۶)^۲$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+۱۴۴=۱۶\times۳۶\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲+۱۴۴=۵۷۶\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲=۴۳۲$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|^۲=۱۴۴\times۳\rightarrow\|\vec{a}\times\vec{b}\|=۱۲\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\times۱۲\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$$

۴ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۲,-۴,-۱)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=(۲)(۳)+(-۴)(۲)+(-۱)(۱)=۶-۸-۱=-۳$$

حجم متوازی السطوح $V=|(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}|=|-۳|=۳$

۵ : الف)

$$(\vec{a}+\vec{b})=(۱,۴,۱)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲)=(-۹,۴,-۷)$$

ب)

$$(\vec{b}\times\vec{c})=(-۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳)=-۱۳$$

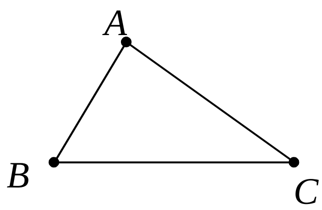
$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=|-۱۳|=۱۳$$

۶ :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(۲,-۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۱,-۳,۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۵,-۳,-۴)$$



مساحت مثلث داده شده $S=\frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}$

۷ : الف :

$$\vec{a}.\vec{b}=(-۴)(۱)+(۳)(-۱)+(-۵)(۱)=-۴-۳-۵=-۱۲$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}=\frac{-۱۲}{۳}(۱,-۱,۱)=-۴(۱,-۱,۱)=(-۴,۴,-۴)$$

ب : بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و هر مضرب غیر صفر آن ، بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. در اینجا فقط کافی است ضرب خارجی را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}۳ & -۵\\ -۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۵ & -۴\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۴ & ۳\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}\right)=(-۲,-۱,۱)$$

ج : مساحت مثلثی که با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تشکیل می شود، برابر نصف اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی این دو بردار است. یعنی :

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{(-۲)^۲+(-۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۶})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۸ :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱)=(۲,-۱,-۴)$$

$$S=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$$

۹ : الف) کافی است که بردار، ضرب خارجی دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را تعیین کنیم.

$$-۲\vec{b}=-۲(-۱,۱,۰)(۲,-۲,۰)$$

$$(-۲\vec{b})\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۲ & ۰\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix})=(۴,۴,۶)$$

ب)

$$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۱\end{vmatrix})=(-۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۲)(-۲)+(۳)(-۲)+(۱)(-۳)=-۴-۶-۳=-۱۳$$

$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=۱۳$ حجم متوازی السطوح

۱۰ :

$$\vec{a}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ -۲ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۳ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & -۲\end{vmatrix})=(۳,-۳,-۳)$$

$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=۰\rightarrow(۰)(۳)+(m)(-۳)+(-۱)(-۳)=۰$$

$$\rightarrow -۳m+۳=۰\rightarrow m=۱$$

❋❋❋

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

www.mathtower.ir

@amerimath