بسم الله الرحمن الرحیم

وبینار بررسی و تحلیل محتوای آموزشی (مثلثات)

گروه آموزش ریاضی متوسطه دوره دوم

استان سیستان و بلوچستان

مثلثات دوازدهم

ریاضی فیزیک – علوم تجربی

تابع متناوب:

فرض کنید عددی حقیقی مانند T وجود دارد که به ازای هر $x \in D_f$ ، داشته باشیم:

۱) $x \pm T \in D_f$

۲) $f(x \pm T) = f(x)$

در این صورت، تابع f را متناوب می‌گوئیم و کوچک‌ترین مقدار مثبت T را که شرایط فوق صدق می‌کند، دوره‌ی تناوب تابع f می‌گوئیم.

برای تابع $y = \sin x$ به ازای هر x از دامنه تابع سینوس داریم:

اولاً: $x \pm ۲k\pi \in D_f$

ثانیاً: $f(x \pm ۲k\pi) = f(x)$

ویژگی فوق به ازای ۲π و ۴π و ۶π و ... نیز برقرار است. کوچک‌ترین مقدار مثبت بین این اعداد را که شرایط فوق صدق می‌کند، دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin x$ می‌نامیم. پس تابع $y = \sin x$، تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T = ۲\pi$ است.

تعبیر هندسی دوره تناوب:

اگر f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد، آن‌گاه نمودار تابع f در هر بازه به طول T تکرار می‌شود.

به عبارت دیگر اگر نمودار تابع f را در یک بازه به طول دوره‌ی تناوب آن داشته باشیم، می‌توان با تکرار این قسمت از نمودار f،

نمودار f را در تمام دامنه‌اش رسم کرد.

نکته:

اگر a و b و c و d عددهای حقیقی باشند که $b \neq ۰$ و a ، آن‌گاه توابع $y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos(bx+c)+d$ متناوب هستند و دوره‌ی تناوب آن‌ها برابر است با: $T = \frac{۲\pi}{|b|}$

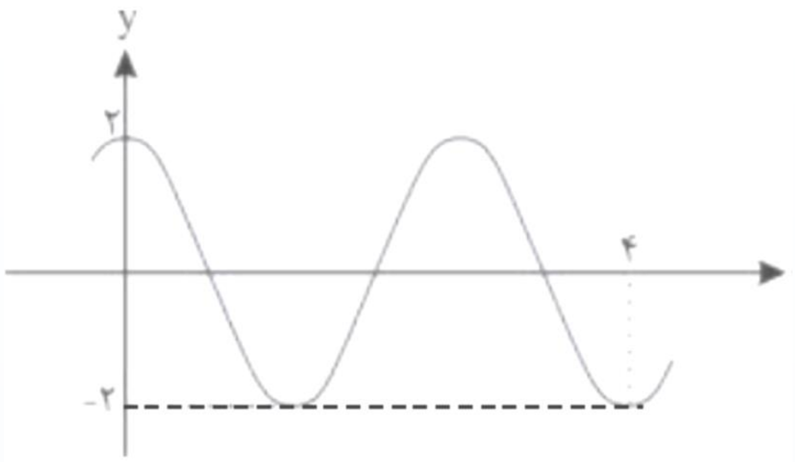
در نکته‌ی فوق، ضرایب a و c و d تاثیری روی دوره‌ی تناوب ندارند. در واقع ضرب یک عدد در تابع تناوب و نیز انتقال تابع متناوب، در دوره‌ی تناوب تاثیری ندارند.

اگر دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=۲\sin(\frac{mx}{۳}-\frac{\pi}{۴})$ برابر دوره‌ی تناوب تابع $g(x)=۱-\cos\frac{x}{۲}$ باشد، مقدار منفی m را به‌دست آورید.

$$T_f=\frac{۲\pi}{|b|}\ \overset{b=\frac{m}{۳}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{۲\pi}{\left|\frac{m}{۳}\right|}=\frac{۶\pi}{|m|}$$

$$T_g=\frac{۲\pi}{|b|}\ \overset{b=\frac{۱}{۲}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۲}\right|}=۴\pi$$

$$T_f=T_g \Rightarrow \frac{۶\pi}{|m|}=۴\pi \Rightarrow |m|=\frac{۳}{۲} \xrightarrow[m<۰]{} m=-\frac{۳}{۲}$$



قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\sin((\frac{۳}{۲}+bx)\pi)$ به‌صورت مقابل است.

مقدار b را به‌دست آورید.

پاسخ: از روی نمودار معلوم می‌شود که ۱/۵ برابر دوره تناوب تابع f برابر ۴ است. پس: $۱/۵T_f=۴$

و از طرفی دوره‌ی تناوب تابع f برابر است با: $T_f=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{|b|}$، پس خواهیم داشت:

$$۱/۵T_f=۴ \xrightarrow{T_f=\frac{۲}{|b|}} ۱/۵\times\frac{۲}{|b|}=۴ \Rightarrow |b|=\frac{۳}{۴}$$

نکته: در توابع $y = a\sin(bx) + c$ و $y = a\cos(bx) + c$ داریم:

۱) مقدار ماکزیمم این توابع برابر است با: $y_{max} = |a| + c$

۲) مقدار مینیمم این توابع برابر است با: $y_{min} = -|a| + c$

۳) مقدار عدد c همواره میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است. یعنی: $c = \frac{y_{max} + y_{min}}{۲}$

دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

$$y = -۱ + \sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۳}x)$$

$$\begin{cases} T = \frac{۲\pi}{|b|} \xlongequal{b = \frac{\pi}{۳}} \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۳}\right|} = ۶ \\ y_{max} = |a| + c = -۱ + \left|\sqrt{۲}\right| = -۱ + \sqrt{۲} \\ y_{min} = -|a| + c = -۱ - \left|\sqrt{۲}\right| = -۱ - \sqrt{۲} \end{cases}$$

نکته: در تابع $y = a\sin(bx) + c$:

۱) اگر $ab > 0$ باشد: (a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.)

در این صورت نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ ، در یک دوره‌ی تناوبش یعنی بازه‌ی $\left[0, \frac{2\pi}{|b|}\right]$ ، رفتاری شبیه به نمودار $y = \sin x$ دارد. یعنی ابتدا ماکزیمم و سپس مینیمم دارد یا می‌توان گفت تابع ابتدا اکیداً صعودی است.

۲) اگر $ab < 0$ باشد: (a و b مختلف‌العلامت باشند.)

در این صورت نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ ، در یک دوره‌ی تناوبش یعنی بازه‌ی $\left[0, \frac{2\pi}{|b|}\right]$ ، رفتاری شبیه به نمودار $y = -\sin x$ دارد. یعنی ابتدا یک مینمم و سپس یک ماکزیمم دارد یا می‌توان گفت تابع اکیداً نزولی است.

نکته: بحث در مورد طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a\sin(bx) + c$

اگر $ab > 0$ باشد:

- $k \in \mathbb{Z}$; $bx = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\sin(bx) + c$ در آن نقاط بیش‌ترین مقدار خودر را دارند.)
- $k \in \mathbb{Z}$; $bx = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\sin(bx) + c$ در آن نقاط کم‌ترین مقدار خود را دارند.)

اگر $ab < 0$ باشد:

- $k \in \mathbb{Z}$; $bx = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\sin(bx) + c$ در آن نقاط کم‌ترین مقدار خود را دارند.)
- $k \in \mathbb{Z}$; $bx = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\sin(bx) + c$ در آن نقاط بیش‌ترین مقدار خود را دارند.)

تابع $f(x)=۴\sin(۲x)$ روی بازه‌ی $[\pi,۲\pi]$ در $x=x_۱$ بیش‌ترین و در $x=x_۲$ کم‌ترین مقدار را اختیار می‌کند. مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به نکته‌ی قبل، چون $ab>۰$ است. پس طول نقطه‌ی ماکزیمم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

طول نقاط ماکزیمم : $۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow$

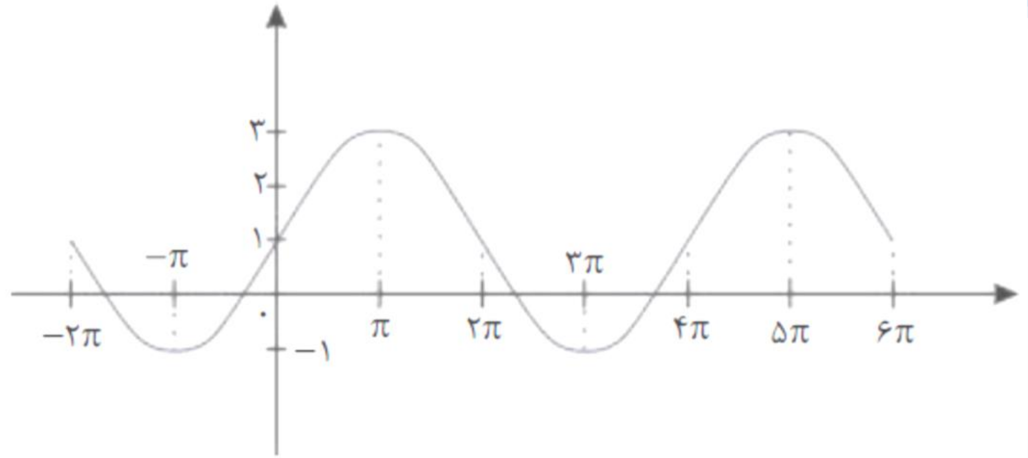
k	-۱	۰	۱	۲
x	$-\pi+\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\pi+\frac{\pi}{۴}$	$۲\pi+\frac{\pi}{۴}$
	×	×	✓	×

پس $x_۱=\frac{۵\pi}{۴}$ طول نقطه‌ی ماکزیمم است.

طول نقطه‌ی مینیمم : $۲x=۲k\pi+۳\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow$

k	-۱	۰	۱	۲
x	$-\pi+\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\pi+\frac{۳\pi}{۴}$	$۲\pi+\frac{۳\pi}{۴}$
	×	×	✓	×

پس طول نقطه‌ی مینیمم، $x_۲=\pi+\frac{۳\pi}{۴}=\frac{۷\pi}{۴}$ است.



نمودار داده شده، مربوط به تابعی با ضابطه‌ی $y = a\sin(bx)+c$ یا $y = a\cos(bx)+c$ است، با توجه به اطلاعات شکل، ضابطه‌ی آن را مشخص کنید.

پاسخ: با توجه به نمودار (نحوه‌ی تقاطع با محور y ها و این‌که ابتدا تابع اکیداً صعودی است)، باید ضابطه‌ی نمودار تابع به فرم $y = a\sin(bx)+c$ باشد که در آن باید $ab > ۰$ باشد. (a و b هم‌علامت باشند.)

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت (۱): a و b هر دو مثبت باشند، آن‌گاه:

محاسبه‌ی c : $c = \dfrac{y_{max} - y_{min}}{۲} \xrightarrow{y_{max}=۳\ ,\ y_{min}=-۱} c = \dfrac{۳+(-۱)}{۲} = ۱$

محاسبه‌ی a : $y_{max} = ۳ \Rightarrow |a| + c = ۳ \xrightarrow{c=۱} |a| = ۲ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$

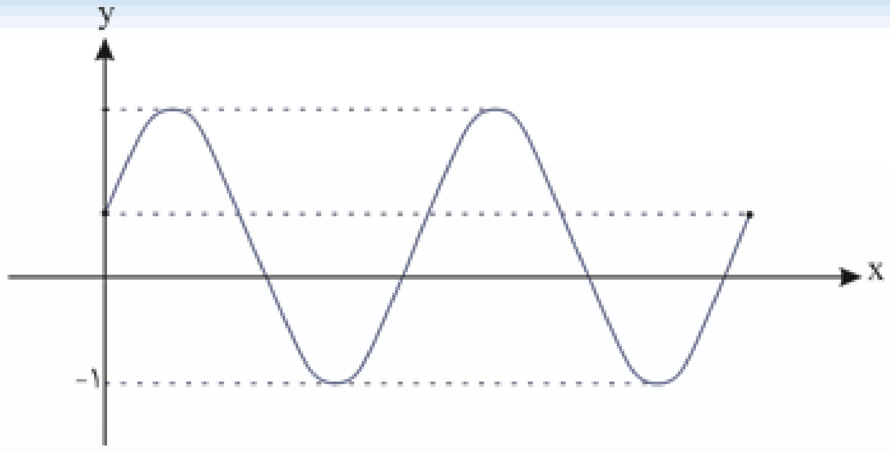
محاسبه‌ی b : $T = ۴\pi \Rightarrow \dfrac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \xrightarrow{b>۰} b = \dfrac{۱}{۲}$

پس در این حالت ضابطه‌ی تابع $y = ۲\sin(\frac{۱}{۲}x)+۱$ است.

حالت (۲): a و b هر دو منفی باشند، آن‌گاه با توجه به محاسبات حالت اول، داریم:

$\boxed{c = ۱\ ,\ a = -۲\ ,\ b = -\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y = -\mathrm{Sin}(-\frac{۱}{۲}x)+۱$

شکل زیر نمودار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$ در بازه‌ی $\left[۰, \frac{۴}{۳}\right]$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟



(خارج از کشور ریاضی ۹۷)

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

پاسخ:

با توجه به شکل، نمودار تابع در دو دوره‌ی تناوب رسم شده است، پس:

$$۲T = \frac{۴}{۳} \Rightarrow T = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |b| = ۳$$

و چون مقدار مینیمم تابع برابر ۱- است، پس:

$$y_{min} = -۱ \Rightarrow ۱ - |a| = -۱ \Rightarrow |a| = ۲$$

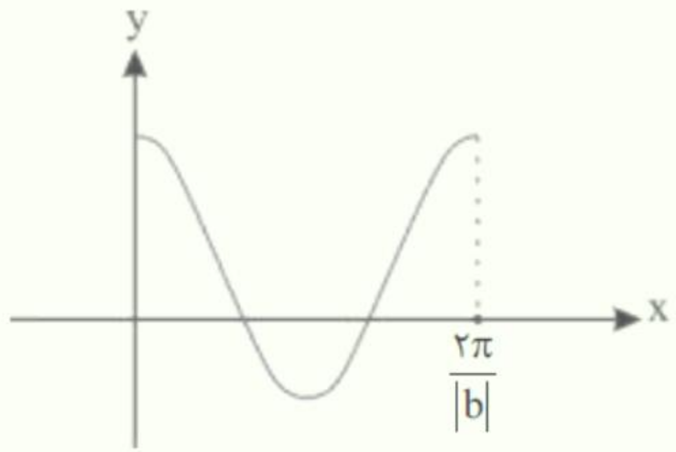
با توجه به نمودار تابع، باید $ab > ۰$ باشد. یعنی a و b هم‌علامت هستند، پس:

$$|b| = ۳, |a| = ۲ \xrightarrow{ab>۰} \begin{cases} a = ۲, b = ۳ & \rightarrow a + b = ۵ \\ a = -۲, b = -۳ & \rightarrow a + b = -۵ \end{cases}$$

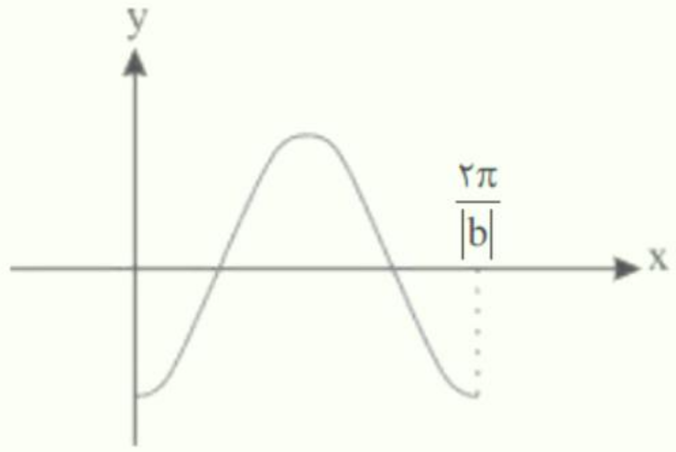
گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته: در تابع $y = a\cos(bx) + c$

۱) اگر $a > 0$ باشد، در این صورت نمودار تابع شبیه نمودار زیر است:



۲) اگر $a < 0$ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y = a\cos(bx) + c$ شبیه نمودار زیر است:



نکته: بحث در باره ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a\cos(bx) + c$

اگر $a > ۰$ **باشد:**

$bx = ۲k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\cos(bx) + c$ درآن بیشترین مقدارش را می‌گیرد.)

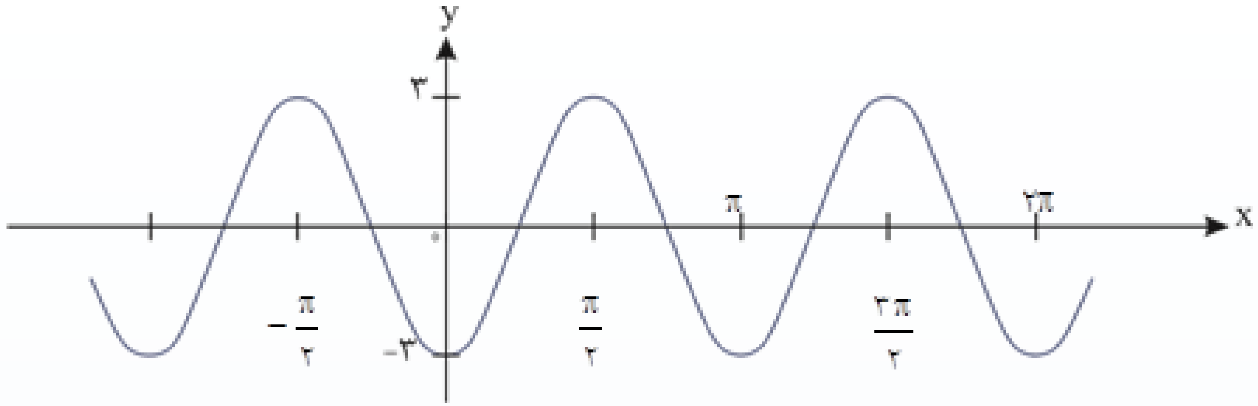
$bx = ۲k\pi + \pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\cos(bx) + c$ کم‌ترین مقدارش را می‌گیرد.)

اگر $a < ۰$ **باشد:**

$bx = ۲k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\cos(bx) + c$ کم‌ترین مقدارش را می‌گیرد.)

$bx = ۲k\pi + \pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$: (طول نقاطی که تابع $y = a\cos(bx) + c$ بیش‌ترین مقدارش را می‌گیرد)

با توجه به نمودار داده شده، ضابطه‌ی آن را مشخص کنید.



با توجه به نمودار تابع داده شده، ضابطه‌ی تابع $y = a\cos(bx) + c$ است که در آن باید $a < ۰$ باشد. برای محاسبه‌ی ضرایب a و b و c داریم:

محاسبه مقدار c : $c = \frac{y_{max} + y_{min}}{۲} = \frac{۳ + (-۳)}{۲} = ۰$

محاسبه مقدار a : $y_{max} = +۳ \Rightarrow |a| + c = ۳ \xrightarrow[a<۰]{c=۰} a = -۳$

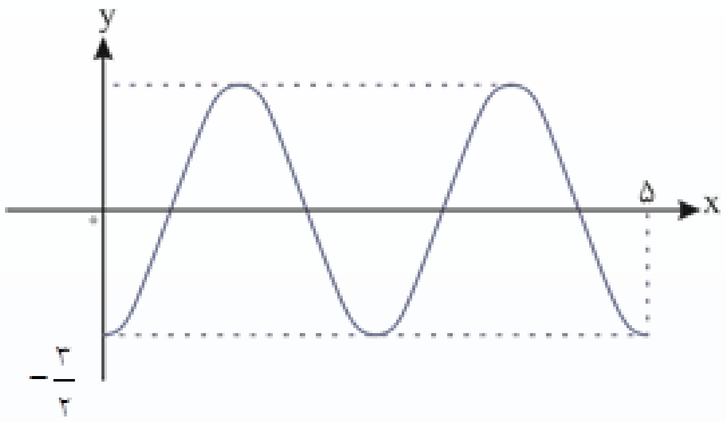
محاسبه b : $T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = ۲$

ضابطه‌ی تابع، به یکی از دو صورت زیر است:

$y = -۳\cos(۲x)$ یا $y = -۳\cos(-۲x)$

با توجه به آن‌که $\cos(-۲x) = \cos(۲x)$ است، دو ضابطه‌ی فوق یکسان است.

شکل زیر قسمتی از تابع $y = a\cos(b\pi x)$ است. بیش‌ترین مقدار $a+b$ را به‌دست آورید.



۱) ۲/۳

۲) ۰/۷

۳) −۰/۷

۴) −۰/۸

باید $a < ۰$ باشد. برای محاسبه‌ی a و b چنین عمل می‌کنیم:

$$\text{محاسبه } a: \quad y_{max} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |a| + ۰ = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a<۰} a = -\frac{۳}{۲}$$

$$\text{محاسبه } b: \quad ۲T = ۵ \Rightarrow T = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۵}{۲} \rightarrow |b| = \frac{۴}{۵}$$

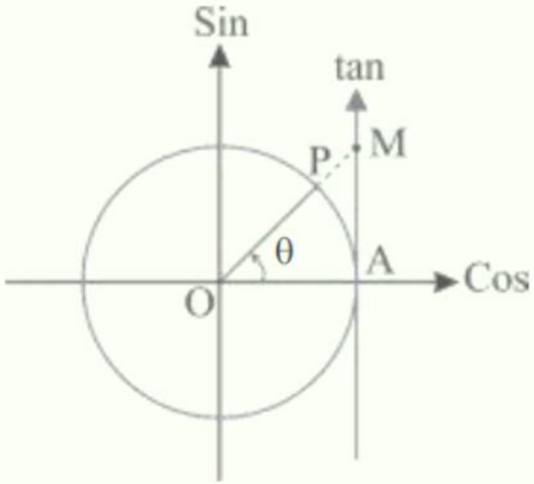
چون مساله بیش‌ترین مقدار $a+b$ را می‌خواهد، پس $b = \frac{۴}{۵}$ است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\max(a+b) = \frac{-۳}{۲} + \frac{۴}{۵} = \frac{-۱۵+۸}{۱۰} = \frac{-۷}{۱۰}$$

گزینه‌ی (۳)درست است.

محور تانژانت

نکته: برای مشخص کردن مقدار تانژانت زاویه θ در دایره مثلثاتی، کافی است ضلع انتهایی زاویه θ، را امتداد دهیم تا محور تانژانت را در نقطه‌ی M قطع کند، در این صورت، اندازه‌ی جبری AM، مقدار تانژانت زاویه θ می‌باشد.



$$\Rightarrow \quad \tan\theta = AM$$

با توجه به تعریف فوق واضح است که:

$$\tan ۰ = \tan \pi = \tan ۲\pi = ۰$$

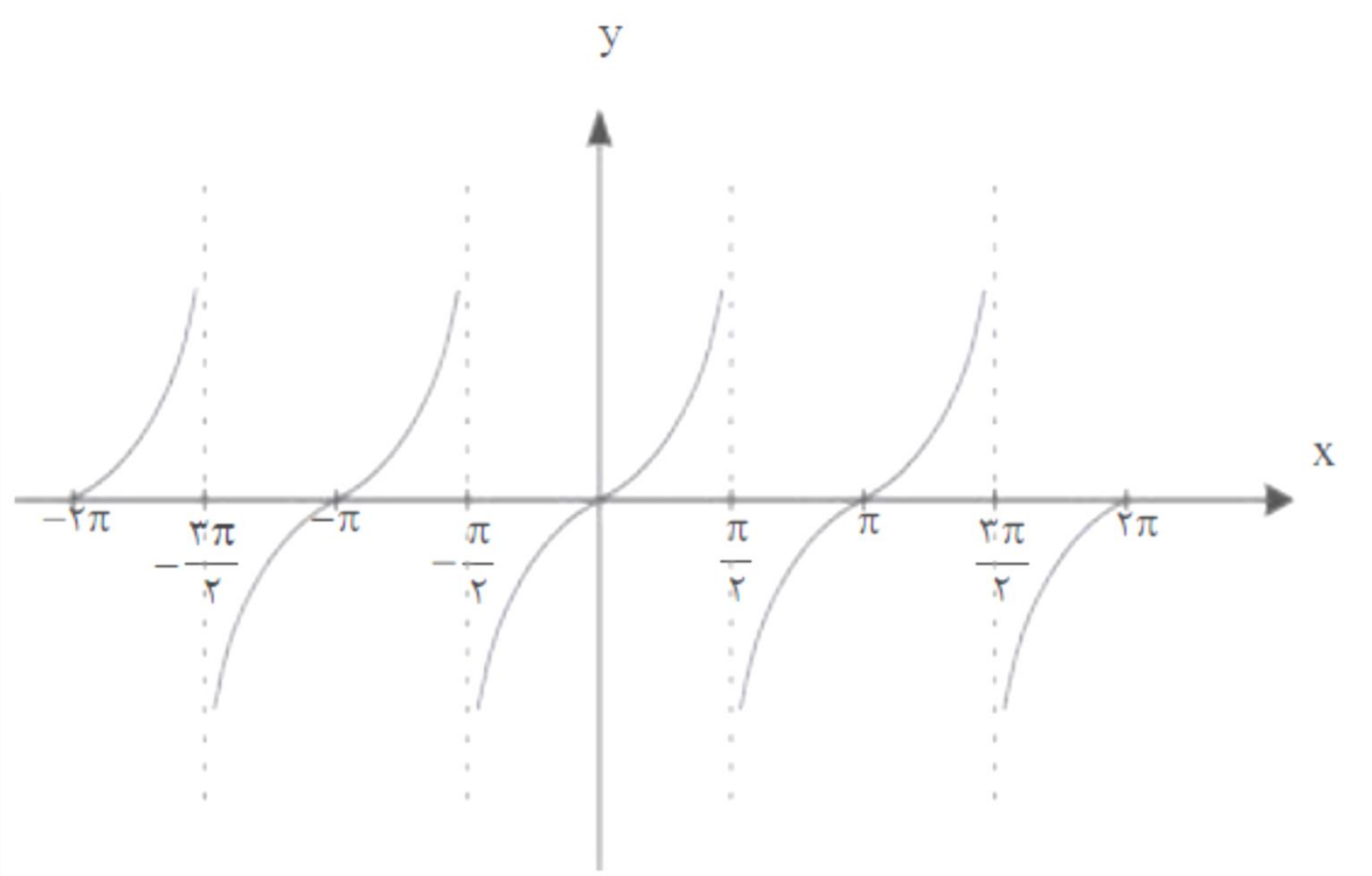
و همچنین به ازای $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\theta = \frac{\pi}{۲}$ مقدار تانژانت تعریف نشده است، زیرا ضلع انتهایی هر یک از این زاویه‌ها با محور تانژانت‌ها موازی است و لذا امتداد این ضلع هرگز محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند.

توجه: با استفاده از روش محاسبه‌ی مقدار تانژانت زاویه، داریم:

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم	ربع اول	θ
$-$	$+$	$-$	$+$	علامت $\tan\theta$
$(-\infty,۰)$	$(۰,+\infty)$	$(-\infty,۰)$	$(۰,+\infty)$	محدوده‌ی مقادیر θ

تابع تانژانت

نمودار کلی تابع $y = \tan x$ به‌صورت زیر است:



نکته: با توجه به نمودار $y = \tan x$ داریم:

۱) تابع تانژانت در نقاط $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, (k \in \mathbb{Z})$ تعریف نشده است.

۲) تابع تانژانت روی دامنه‌اش غیر یکنواست ولی در بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ و ... تعریف شده‌اند و روی این بازه‌ها اکیداً صعودی‌اند. در حالت کلی تابع $y = \tan x$ روی هر بازه به‌صورت $(k\pi - \frac{\pi}{۲}, k\pi + \frac{\pi}{۲})$ که $k \in \mathbb{Z}$، تعریف شده و اکیداً صعودی‌اند.

۳) اگر a و b و d عددهای حقیقی باشند و $b \neq ۰$ و a باشند، آن‌گاه دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = a\tan(bx + c) + d$ برابر است با: $T = \frac{\pi}{|b|}$

اگر $f(x)=\tan x-\frac{۱}{\tan x}$ باشد، دوره‌ی تناوب $\frac{۱}{f}$ کدام است؟

$$\tan x-\frac{۱}{\tan x}=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^۲ x-\cos^۲ x}{\sin x.\cos x}=\frac{-(\cos^۲ x-\sin^۲ x)}{\frac{۱}{۲}\times(۲\sin x.\cos x)}=\frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\times\sin ۲x}=-۲\cot ۲x=\frac{-۲}{\tan ۲x}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع g برابر است با: $g(x)=\frac{۱}{f(x)}=-\frac{۱}{۲}\tan(۲x)$. پس دوره‌ی تناوب تابع g برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

دامنه‌ی تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi-۲\pi x}{۲})$ را به‌دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم برای تابع $y=\tan x$ باید $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشد. پس:

$$\frac{\pi-۲\pi x}{۲}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۲}-\pi x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow -\pi x\neq k\pi \Rightarrow x\neq -k \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین اعداد صحیح در دامنه‌ی تابع قرار ندارند. یعنی: $D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

بحث در رابطه با نمودار $y = a\tan(bx+c)+d$

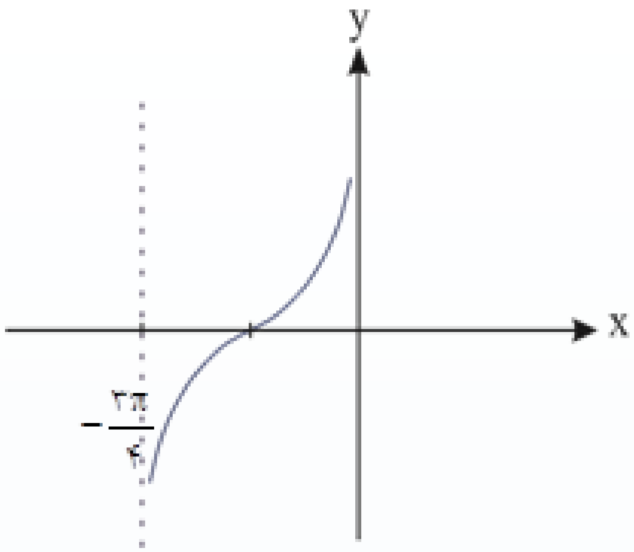
دو حالت کلی زیر را داریم:

حالت (۱): اگر $ab > 0$ باشد. (یعنی a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند) آن‌گاه نمودار تابع $y = a\tan(bx+c)+d$ ، شبیه به نمودار

$y = \tan x$ است یعنی در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد، اکیداً صعودی است.

حالت (۲): اگر $ab < 0$ باشد. (یعنی a و b مختلف‌العلامت باشند) آن‌گاه نمودار تابع $y = a\tan(bx+c)+d$ ، شبیه به نمودار $y = -\tan x$

است، یعنی در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده باشد، اکیداً نزولی است.



شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax+b)$ است. مقدار a را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به نکته‌ی قبل چون تابع اکیداً صعودی است، باید $a > ۰$ باشد.

از طرفی طبق نمودار، دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ است، پس:

$$T = \frac{\pi}{|a|} = \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow |a| = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{۴}{۳}$$

حل معادله‌ی $\sin x = a$

$$\sin x = a \xrightarrow{\sin\alpha = a} \sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ , \\ x = (۲k+۱)\pi - \alpha \end{cases}$$

نکته: حالت‌های خاص حل معادله‌ی $\sin x = a$

هرگاه پس از ساده کردن معادلات مثلثاتی، به معادله‌های $\sin x = ۰$ ، $\sin x = ۱$ یا $\sin x = -۱$ برسیم، آن‌گاه جواب‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$\sin x = ۰ \quad \rightarrow \quad x = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = ۱ \quad \rightarrow \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -۱ \quad \rightarrow \quad x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

حل معادله‌ی $\cos x = a$

$$\cos x = a \xrightarrow{\cos\alpha = a} \cos x = \cos\alpha \xrightarrow{\text{تمام جواب‌های معادله}} x = ۲k\pi \pm \alpha$$

نکته: حالت‌های خاص حل معادله‌ی $\cos x = a$

هر گاه پس از ساده‌سازی معادله‌ی مثلثاتی، به معادله‌های مثلثاتی $\cos x = ۰$ ، $\cos x = ۱$ برسیم، آن‌گاه جواب‌های معادله به‌صورت زیر است:

$$\cos x = ۰ \quad \rightarrow \quad x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = ۱ \quad \rightarrow \quad x = ۲k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -۱ \quad \rightarrow \quad x = (۲k + ۱)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

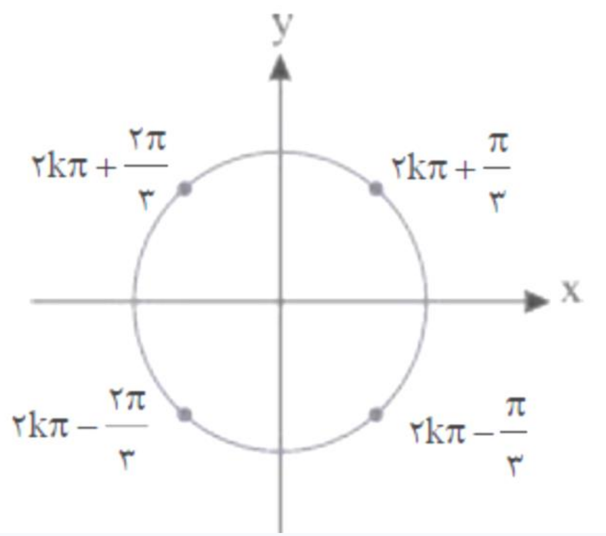
جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۶)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = +\frac{1}{2} \\ \text{یا} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \\ \text{یا} \\ \cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

اگر انتهای کمان‌های جواب‌های به‌دست آمده را در دایره مثلثاتی مشخص کنیم، داریم:



مشاهده می‌شود جواب‌های مساله به فرم $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است. پس گزینه‌ی (۳) درست است.

نکته: حل معادلات مثلثاتی $\cos^2 x = a^2$ و $\sin^2 x = a^2$

(۱) برای حل معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x = a^2$، ابتدا زاویه α را طوری پیدا می‌کنیم که $\cos\alpha = a$ شود، آن‌گاه:

$$\cos^2 x = a^2 \xrightarrow{\cos\alpha = a} \cos^2 x = \cos^2\alpha \xrightarrow{\text{جواب‌های کلی معادله}} x = k\pi \pm \alpha$$

(۲) برای حل معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x = a^2$ نیز مشابه نکته‌ی قبل عمل می‌کنیم:

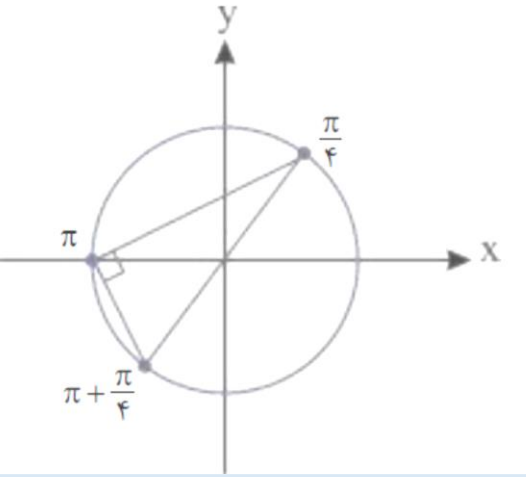
$$\sin^2 x = a^2 \xrightarrow{\sin\alpha = a} \sin^2 x = \sin^2\alpha \xrightarrow{\text{جواب‌های کلی معادله}} x = k\pi \pm \alpha$$

نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی $\frac{\sin x.\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x$ روی دایره مثلثاتی، راس‌های کدام چند ضلعی است؟

۱) مستطیل ۲) ذوزنقه ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مربع

$$\frac{\sin x.\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x=1-\cos^2 x \Rightarrow \sin x.\cos x=\sin^2 x \Rightarrow \sin x(\sin x-\cos x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \rightarrow & x=k\pi \\ \sin x=\sin(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow & \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}+x \quad \times \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi \\ x=k\pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$



دقت کنید به ازای $x=2k\pi$ مخرج کسر در معادله‌ی اولیه صفر می‌شود. پس جواب‌های معادله $x=(2k+1)\pi$ و $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ هستند

حل معادله‌ی $\tan x = a$

برای حل معادله‌ی $\tan x = a$، ابتدا زاویه α را طوری پیدا می‌کنیم که $\tan\alpha = a$ شود. در این صورت معادله به شکل $\tan x = \tan\alpha$ تبدیل می‌شود. آن‌گاه تمام جواب‌های معادله از روش زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan x = a \xrightarrow{\tan\alpha = a} \tan x = \tan\alpha \xrightarrow{\text{جواب‌های کلی معادله}} x = k\pi + \alpha \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب کلی زیر را به‌دست آورید. $\tan ۲x = \cot x$

$$\tan ۲x = \cot x \rightarrow \tan ۲x = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های کلی}} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

نکته: برخی از اتحادهای مهم مثلثاتی برای تانژانت

$$۱)\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$۲)\ ۱+\tan^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$$

$$۳)\ ۱+\cot^{۲} x=\frac{۱}{\sin^{۲} x}$$

$$۴)\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$$

$$۵)\ \sin x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}}$$

$$۶)\ \cos x=\frac{۱-\tan^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{x}{۲}}$$

$$۷)\ \tan x=\frac{\sin ۲x}{۱+\cos ۲x}$$

$$۸)\ \tan x=\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}$$

$$۹)\ \tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$$

$$۱۰)\ \cot x-\tan x=۲\cot ۲x$$

$$۱۱)\ \tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}$$

$$۱۲)\ \tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$$

جواب‌های کلی معادله‌ی $\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲} x}=\sqrt{۳}$ به کدام صورت است؟ (خارج از کشور تجربی - ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$

۳) $k\pi+\frac{\pi}{۶}$

۴) $k\pi-\frac{\pi}{۶}$

پاسخ: با استفاده از اتحادهای مثلثاتی $\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲} x}$ ، داریم:

$$\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲} x}=\sqrt{۳} \Rightarrow \tan ۲x=\sqrt{۳}=\tan\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\text{جواب‌های کلی معادله}} ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$$

مجموع جواب‌های معادله‌ی $\cot x - \tan x = 1 + \cot 2x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{9\pi}{4}$ ۲) 2π ۳) $\frac{5\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{2}$

پاسخ: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$ ، داریم:

$$\cot x - \tan x = 1 + \cot 2x \rightarrow 2\cot 2x = 1 + \cot 2x \rightarrow \cot 2x = 1 \rightarrow \frac{1}{\tan 2x} = 1 \rightarrow \tan 2x = 1$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های کلی معادله}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

k	0	1	2	3	4	-1
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$	$\frac{-3\pi}{8}$
	✓	✓	✓	✓	×	×

از توجه شما عزیزان سپاسگزایم

گروه آموزش ریاضی متوسطه دوره دوم
استان سیستان و بلوچستان