بسم الله الرحمن الرحیم

وبینار بررسی و تحلیل محتوای آموزشی (مثلثات)

گروه آموزش ریاضی متوسطه دوره دوم

استان سیستان و بلوچستان

مثلثات یازدهم

ریاضی و فیزیک – علوم تجربی

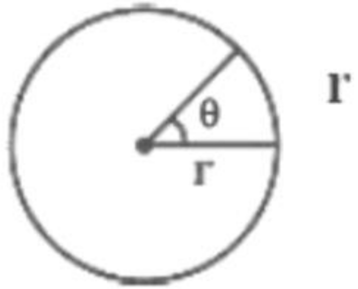
واحدهای اندازه‌گیری زاویه

تعریف درجه: اگر محیط یک دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، به اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به هر یک از این قسمت‌ها، یک درجه گفته می‌شود.

تعریف رادیان: اندازه‌ی زاویه مرکزی θ که روبه‌روی به کمان به اندازه L از دایره‌ای به شعاع r قرار دارد، بر حسب رادیان برابر است با:

$$\xrightarrow[\text{بر حسب رادیان}]{\text{اندازه‌ی زاویه } \theta} \qquad \theta = \frac{L}{r} \quad (\text{رادیان})$$

نکته: اگر اندازه‌ی کمان روبه‌رو به زاویه‌ی مرکزی در دایره با شعاع دایره برابر باشد. آن‌گاه اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان برابر یک رادیان است.



$$\xrightarrow[\text{بر حسب رادیان}]{\text{اندازه‌ی زاویه } \theta} \qquad \theta = \frac{r}{r} = 1 \quad (\text{rad})$$

توجه: زاویه نیم صفحه. برابر π رادیان است. زیرا:

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \ (\text{rad})$$

تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \xleftarrow[\text{تناسب}]{\text{قاعده}}$$

رادیان	درجه
π	180°
R	D

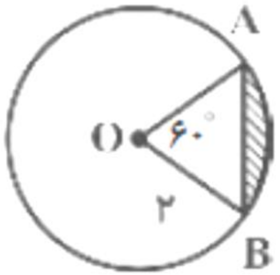
چرخ و فلکی ۴۰ کابین با فاصله‌ی مساوی دارد و کابین‌های آن شماره‌گذاری شده‌اند. شخصی سوار کابین شماره‌ی ۳ می‌شود.

اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ به‌صورت پادساعتگرد دوران کند، این شخص در موقعیت کدام کابین قرار می‌گیرد؟

چون تمام کابین‌ها با فاصله‌ی مساوی از یکدیگر قرار دارند. پس اندازه‌ی زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی از دایره که مابین دو کابین متوالی قرار دارد، بر حسب رادیان برابر $\frac{۲\pi}{۴۰}=\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است.

کابین شماره (۳) به اندازه‌ی $\frac{۴۷\pi}{۱۰}=۴\pi+\frac{۱۴\pi}{۲۰}$ رادیان به‌صورت پادساعتگرد چرخیده است. بدیهی است که پس از چرخش ۴π رادیان هر کابین به محل اولیه خود بازمی‌گردد. حال با چرخش $\frac{۱۴\pi}{۲۰}$ رادیان، هر کابین به اندازه‌ی ۱۴ کابین جلو می‌رود و در نتیجه کابین شماره‌ی ۳ به موقعیت کابین شماره‌ی ۱۷ منتقل می‌شود.

در شکل مقابل طول کمان AB را به‌دست آورید.



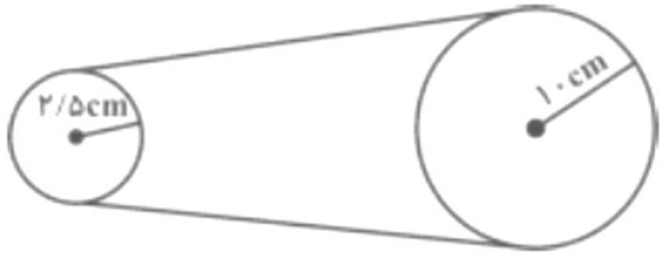
پاسخ:

طبق تعریف رادیان، می‌توان اندازه‌ی کمان و شعاع در دایره را به هم مربوط ساخت.

از طرفی $۶۰^\circ = ۶۰ \times ۱^\circ = ۶۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۳}\ \text{rad}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\theta = \frac{L}{r} \xrightarrow[r=۲\ \text{cm}]{\theta=\frac{\pi}{۳}} \frac{\pi}{۳} = \frac{AB}{۲\ \text{cm}} \Rightarrow AB = \frac{۲\pi}{۳}\text{cm} \simeq \frac{۲\times ۳/۱۴}{۳} = ۲/۰۹\text{cm}$$

در شکل مقابل یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های ۱۰cm و ۲/۵cm را به هم وصل کرده است. اگر قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان بچرخد قرقره‌ی کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس مسافت طی شده توسط هر دو قرقره یکسان است.

اگر L مسافت طی شده توسط قرقره‌ی بزرگ‌تر باشد، داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \xrightarrow[r=۲]{\theta=\frac{\pi}{۲}} \frac{\pi}{۲} = \frac{L}{۱۰} \Rightarrow L = ۵\pi$$

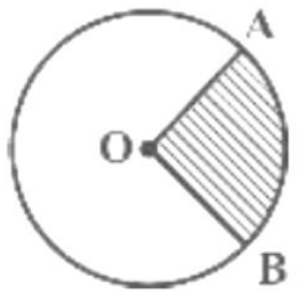
قرقره‌ی کوچکتر مسافت ۵π را طی کرده است، پس زاویه طی شده برابر است با:

$$\theta_{\text{قرقره کوچک}} = \frac{۵\pi}{۲/۵} = ۲\pi(\text{rad})$$

یعنی قرقره‌ی کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد.

مساحت قطاع دایره

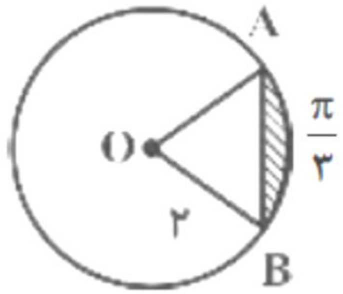
تعریف قطاع دایره: به ناحیه‌ای که بین دو شعاع دایره قرار دارد، قطاع دایره گفته می‌شود. مانند قطاع OAB در دایره زیر:



مساحت قطعه‌ی OAB برابر است با: $S = \frac{1}{2}r^2\theta$

تذکر: برای محاسبه‌ی مساحت قطاع، زاویه θ باید بر حسب رادیان باشد.

با توجه به شکل مقابل، مساحت قسمت رنگ شده را به‌دست آورید.



اگر مساحت قسمت رنگی را با S نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$S = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} r^{۲} \operatorname{Sin}\theta = \frac{۱}{۲} \times (۲)^{۲} \times \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۱$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲} r^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}(۲)^{۲}\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\pi}{۳}$$

پس مساحت قسمت رنگ شده برابر است با:

$$S = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{\pi}{۳} - ۱$$

شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است.

اندازه‌ی زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده‌ی این مخروط چند رادیان است؟

محیط قاعده‌ی مخروط، همان طول کمان قطاع حاصل از شکل گسترده‌ی مخروط می‌باشد. پس:

$$\text{(طول کمان قطاع)}\ AB = \text{محیط قاعده‌ی مخروط} = ۲\pi r \xrightarrow{r=۹} ۱۸\pi$$

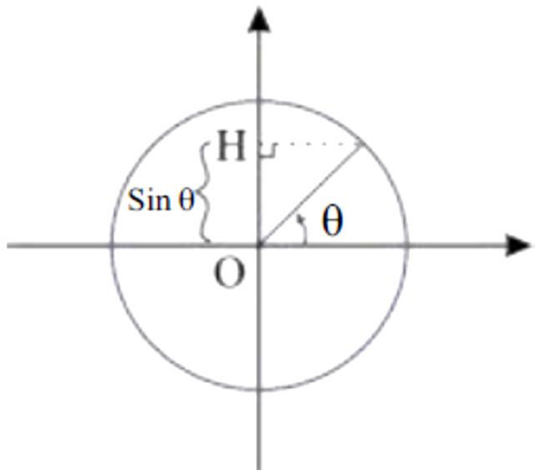
همچنین طول مولد مخروط (یعنی L) برابر شعاع قطاع است و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$L^{۲} = r^{۲} + h^{۲} = ۹^{۲} + ۱۲^{۲} = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵ \Rightarrow L = ۱۵$$

زاویه مرکزی قطاع برابر است با: $\theta = \dfrac{L}{AB} = \dfrac{۱۸\pi}{۱۵} = \dfrac{۶\pi}{۵}\,\text{rad}$

محورهای مثلثاتی

۱– محور سینوس‌ها



$\Rightarrow \quad \sin\theta = OH$

با توجه به تعریف فوق، اگر انتهای کمان زاویه θ در یکی از چهار ربع دایره باشد، می‌توانیم علامت نسبت‌های مثلثاتی را به راحتی تعیین کنیم.

انتهای کمان زاویه θ	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+	+	−	−
محدوده مقادیر $\sin\theta$	(۰,۱)	(۰,۱)	(−۱,۰)	(−۱,۰)
یکنوایی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

فرض کنید $\pi < \alpha < \beta < \frac{۳\pi}{۲}$ ، $\operatorname{Sin}\alpha = \frac{m+۱}{۲}$ و $\operatorname{Sin}\beta = \frac{۲m-۱}{۲}$ باشد. محدوده‌ی مقادیر m را به‌دست آورید.

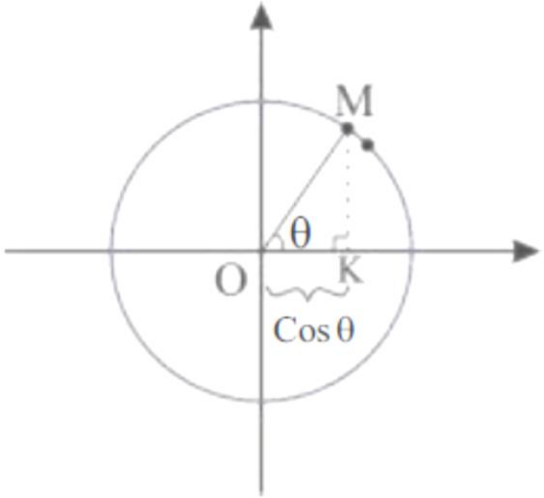
از فرض $\pi < \alpha < \beta < \frac{۳\pi}{۲}$ نتیجه می‌گیریم α و β در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارند. می‌دانیم مقدار سینوس در ربع سوم نزولی است.

$$\pi < \alpha < \beta < \frac{۳\pi}{۲} \quad \Rightarrow \quad -۱ < \operatorname{Sin}\beta < \operatorname{Sin}\alpha < ۰ \quad \Rightarrow \quad -۱ < \frac{۲m-۱}{۲} < \frac{m+۱}{۲} < ۰ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{۲m-۱}{۲} > -۱ \\ \frac{۲m-۱}{۲} < \frac{m+۱}{۲} \\ \frac{m+۱}{۲} < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲m-۱ > -۲ \\ ۲m-۱ < m+۱ \\ m+۱ < ۰ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m > -\frac{۱}{۲} \\ m < +۲ \\ m < -۱ \end{cases}$$

اشتراک سه محدوده‌ی فوق تهی است، پس هیچ مقدار m ای وجود ندارد.

۲– محور کسینوس‌ها

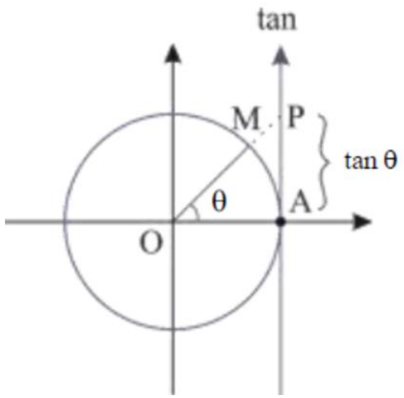


$\Rightarrow \quad \cos\theta = Ok$

جدول زیر را برای کسینوس زاویه θ داریم.

θ	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
علامت $\cos\theta$	مثبت	منفی	منفی	مثبت
محدوده مقادیر $\cos\theta$	(۰,۱)	(−۱,۰)	(−۱,۰)	(۰,۱)
یکنوایی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

۳– محور تانژانت



$\Rightarrow \qquad \tan\theta = AP$

نکته: با استفاده از تعریف تانژانت یک زاویه در دایره مثلثاتی به سادگی می‌توان نتایجی را که در جدول زیر آمده است را به‌دست آورد.

θ	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
علامت $\tan\theta$	+	−	+	−
محدوده مقادیر $\tan\theta$	$(۰,+\infty)$	$(-\infty,۰)$	$(۰,+\infty)$	$(-\infty,۰)$

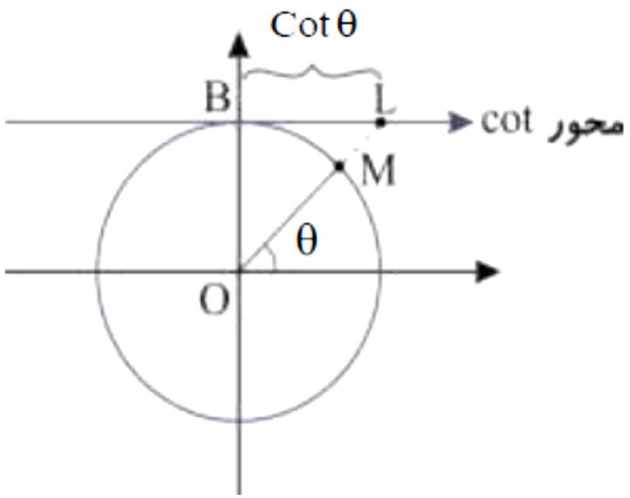
فرض کنید $\frac{\pi}{۴} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $\tan\theta = \frac{m-۱}{۳}$ است. محدوده‌ی مقادیر m را به‌دست آورید.

پاسخ: با توجه به محدوده‌ی زاویه θ و نحوه‌ی محاسبه‌ی تانژانت زاویه در دایره مثلثاتی و با توجه به این‌که $\tan\frac{\pi}{۴} = ۱$ است، داریم: $\tan\theta > ۱$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{m-۱}{۳} > ۱ \Rightarrow \qquad m-۱ > ۳ \qquad \Rightarrow \qquad m > ۴$$

۴– محور کتانژانت‌ها

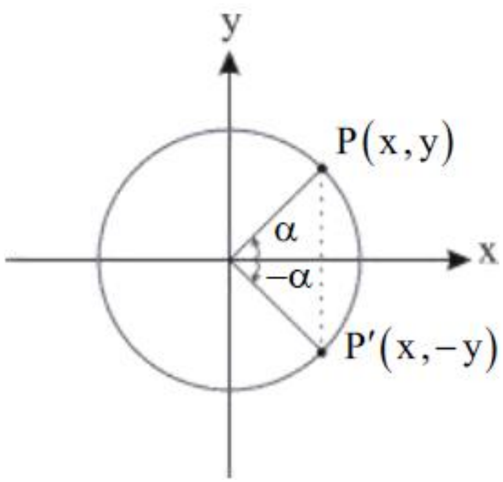


$$\Rightarrow \qquad \cot\theta = BL$$

نکته: با استفاده از تعریف کتانژانت یک زاویه در دایره مثلثاتی به سادگی می‌توان به نتایج جدول زیر رسید:

θ	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
علامت $\cot\theta$	+	−	+	−
محدوده مقادیر $\cot\theta$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

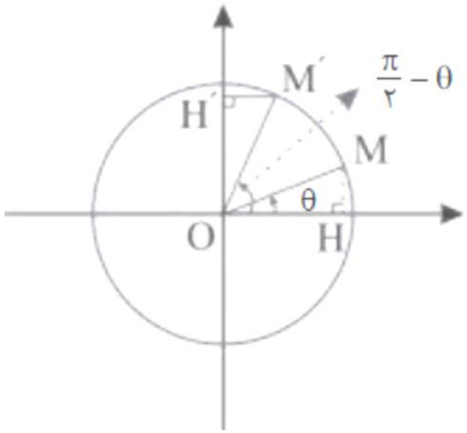


با توجه به شکل داریم:

$\cos\alpha = x$	$\cos(-\alpha) = x$
$\sin\alpha = y$	$\sin(-\alpha) = -y$
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$	$\tan(-\alpha) = -\frac{y}{x}$
$\cot\alpha = \frac{x}{y}$	$\cot(-\alpha) = -\frac{x}{y}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم



نتیجه: اگر α و β دو زاویه متمم یکدیگر باشند، آن‌گاه:

(۱) $\sin\alpha = \cos\beta$

(۲) $\cos\alpha = \sin\beta$

(۳) $\tan\alpha = \cot\beta$

(۴) $\cot\alpha = \tan\beta$

نسبت‌های مثلثاتی زوایایی $k\pi \pm \alpha$ برحسب زاویه α

حالت اول) اگر k عددی زوج باشد، آن‌گاه برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه $k\pi \pm \pi$ می‌توان مضارب $k\pi$ را حذف کرد.

$\text{Sin}(۲k\pi + \alpha) = \text{Sin}\,\alpha$	$\text{Sin}(۲k\pi - \alpha) = \text{Sin}(-\alpha) = -\text{Sin}\,\alpha$
$\text{Cos}(۲k\pi + \alpha) = \text{Cos}\,\alpha$	$\text{Cos}(۲k\pi - \alpha) = \text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos}\,\alpha$
$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\tan(۲k\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\text{Cot}(۲k\pi + \alpha) = \text{Cot}\,\alpha$	$\text{Cot}(۲k\pi - \alpha) = \text{Cot}(-\alpha) = -\text{Cot}\alpha$

حالت دوم) اگر k عددی فرد باشد، آن‌گاه برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه $k\pi \pm \pi$ ابتدا مضارب $k\pi$ را حذف می‌کنیم و سپس علامت نسبت‌های مثلثاتی را در دو سمت تساوی را بررسی کرده که یکسان باشند.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta$ بر حسب زاویه θ

برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\pm\theta$ ابتدا نسبت‌های مثلثاتی Sin به Cos و tan به Cot و بالعکس، تبدیل می‌کنیم. سپس برای تعیین علامت می‌توان θ را حاده در نظر گرفت و علامت نسبت‌های مثلثاتی را در دو سمت تساوی را بررسی کرده، که یکسان باشند.

نکته: نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{۳\pi}{۲}\pm\theta$ بر حسب θ به‌صورت زیر است:

$\mathrm{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\mathrm{Cos}(-\theta)=-\mathrm{Cos}\,\theta$	$\mathrm{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\mathrm{Cos}\,\theta$
$\mathrm{Cos}(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=\mathrm{Sin}(-\theta)=-\mathrm{Sin}\,\theta$	$\mathrm{Cos}(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=\mathrm{Sin}\,\theta$
$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\mathrm{Cot}(-\theta)=\mathrm{Cot}\,\theta$	$\tan(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\mathrm{Cot}\,\theta$
$\mathrm{Cot}(\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=-\tan(-\theta)=\tan\theta$	$\mathrm{Cot}(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=-\tan\theta$

اگر $\text{Cot}\,۳۴^\circ = ۱/۵$ باشد، مقدار $A = \dfrac{۳\,\text{Sin}\,۳۲۶^\circ + ۳\,\text{Sin}\,۵۶^\circ}{\text{Cos}\,۳۰۴^\circ + \text{Sin}\,۵۶^\circ}$ را به‌دست آورید.

$$\text{Sin}\,۲۳۶^\circ = \text{Sin}\left(۳۶۰^\circ - ۳۴^\circ\right) = \text{Sin}\left(-۳۴^\circ\right) = -\text{Sin}\,۳۴^\circ$$

$$\text{Sin}\,۵۶^\circ = \text{Cos}\,۳۴^\circ \quad \text{(دو زاویه متمم)}$$

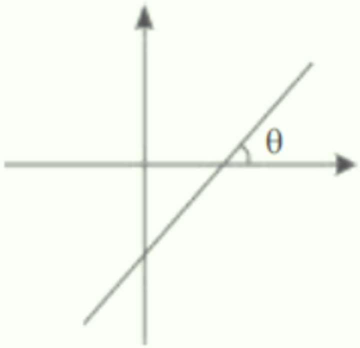
$$\text{Cos}\,۳۰۴^\circ = \text{Cos}\left(۲۷۰^\circ + ۳۴^\circ\right) = \text{Sin}\left(۳۴^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{۲\text{Sin}\,۳۲۶^\circ + ۳\,\text{Sin}\,۵۶^\circ}{\text{Cos}\,۳۰۴^\circ + \text{Sin}\,۵۶^\circ} = \frac{۲\left(-\text{Sin}\,۳۴^\circ\right) + ۳\,\text{Cos}\,۳۴^\circ}{\text{Sin}\,۳۴^\circ + \text{Cos}\,۳۴^\circ}$$

صورت و مخرج را بر $\text{Sin}\,۳۴^\circ$ تقسیم می‌کنیم. پس:

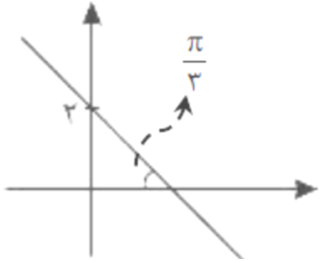
$$A = \frac{\dfrac{۲\left(-\text{Sin}\,۳۴^\circ\right) + ۳\,\text{Cos}\,۳۴^\circ}{\text{Sin}\,۳۴^\circ}}{\dfrac{\text{Sin}\,۳۴^\circ + \text{Cos}\,۳۴^\circ}{\text{Sin}\,۳۴^\circ}} = \frac{-۲ + \text{Cot}\,۳۴^\circ}{۱ + \text{Cot}\,۳۴^\circ} = \frac{-۲ + ۳ \times ۱/۵}{۱ + ۱/۵} = \frac{۲/۵}{۲/۵} = ۱$$

نکته: شیب هر خط همان تانژانت زاویه‌ای است که با قسمت مثبت محور x ها می‌سازد.



$$\text{شیب خط} = m = \tan\theta$$

معادله خط روبه‌رو را به‌دست آورید.



پاسخ: معادله‌ی خطی را می‌خواهیم که از نقطه‌ی $(۰,۲)$ می‌گذرد و شیب آن برابر است با:

$$m = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \tan(-\frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

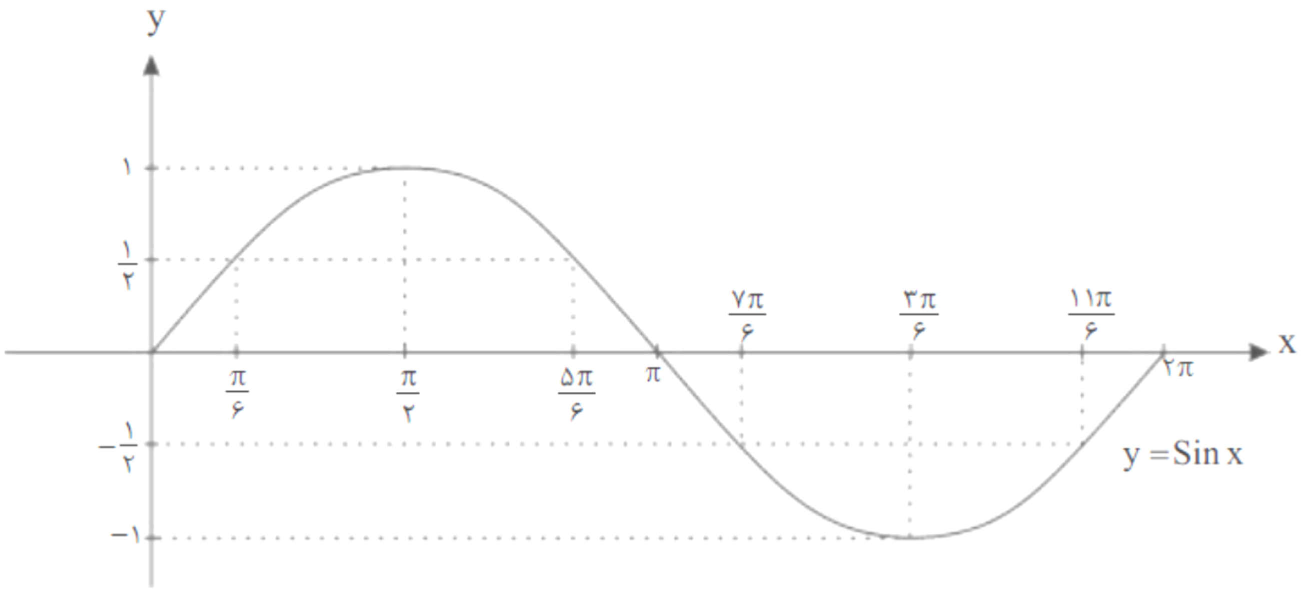
معادله‌ی خط به‌صورت زیر است:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + ۲$$

نمودار تابع $y = \sin x$

برای رسم تابع $y = \sin x$ روی بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ با استفاده از روش نقطه‌یابی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$y = \sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰
مختصات نقطه	$(۰,۰)$	$(\frac{\pi}{۶}, \frac{۱}{۲})$	$(\frac{\pi}{۲}, ۱)$	$(\frac{۵\pi}{۶}, \frac{۱}{۲})$	$(\pi, ۰)$	$(\frac{۷\pi}{۶}, \frac{-۱}{۲})$	$(\frac{۳\pi}{۲}, -۱)$	$(\frac{۱۱\pi}{۶}, -۱)$	$(۲\pi, ۰)$



نکته: با توجه به نمودار تابع $y=\operatorname{Sin}x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$، در رابطه با صعودی و یا نزولی بودن تابع سینوس، داریم:

- ☑ در بازه‌ی $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$، مقدار تابع از صفر به یک افزایش می‌یابد.
- ☑ در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$، مقدار تابع از ۱ به ۱- کاهش می‌یابد.
- ☑ در بازه‌ی $\left[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right]$، مقدار تابع از ۱- به صفر افزایش می‌یابد.

نکته: با توجه به نمودار کلی $y=\operatorname{Sin}x$ می‌توان نکات زیر را بیان کرد:

- ☑ دامنه‌ی تابع $y=\operatorname{Sin}x$ تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و برد آن بازه‌ی $[-۱,۱]$ است.
- ☑ حداکثر مقدار تابع $y=\operatorname{Sin}x$ برابر ۱ است و در نقاطی به طول $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ که $k\in\mathbb{Z}$ است، اتفاق می‌افتد.
- ☑ حداقل مقدارتابع $y=\operatorname{Sin}x$ برابر ۱- است و در نقاطی به طول $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ که $k\in\mathbb{Z}$ است، اتفاق می‌افتد.
- ☑ مقدار تابع $y=\operatorname{Sin}x$ در نقاطی به طول $k\in\mathbb{Z}\ ;\ x=k\pi$ است، برابر صفر می‌باشد. بنابراین طول نقاط تلاقی این تابع با محور x ها برابر $(k\in\mathbb{Z})$ $x=k\pi$ است.

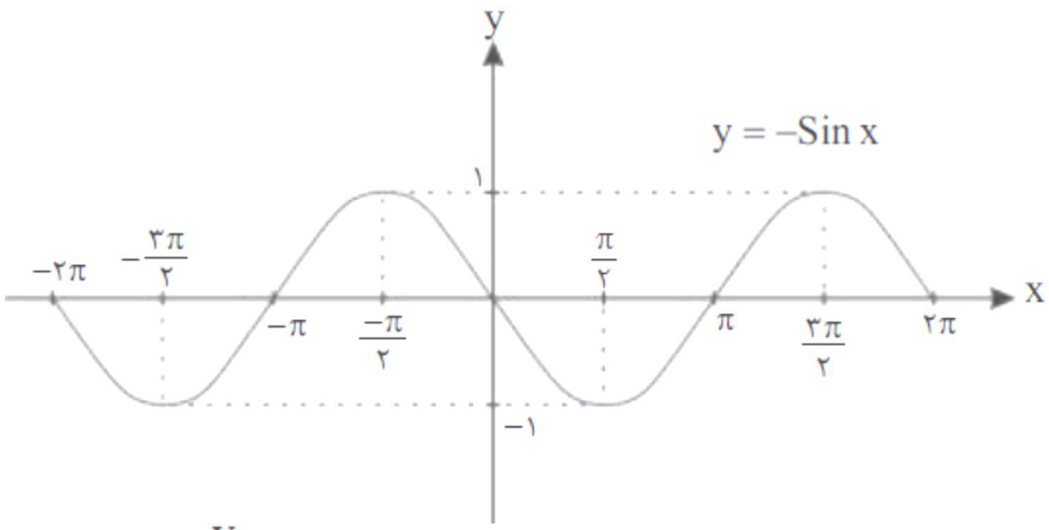
نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

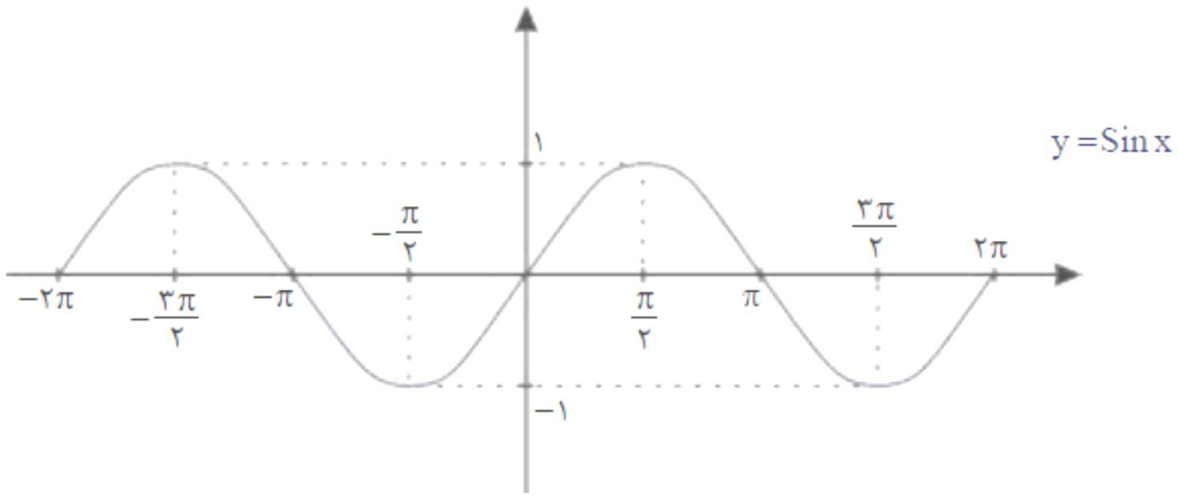
الف) $y = -\mathrm{Sin}\,x$

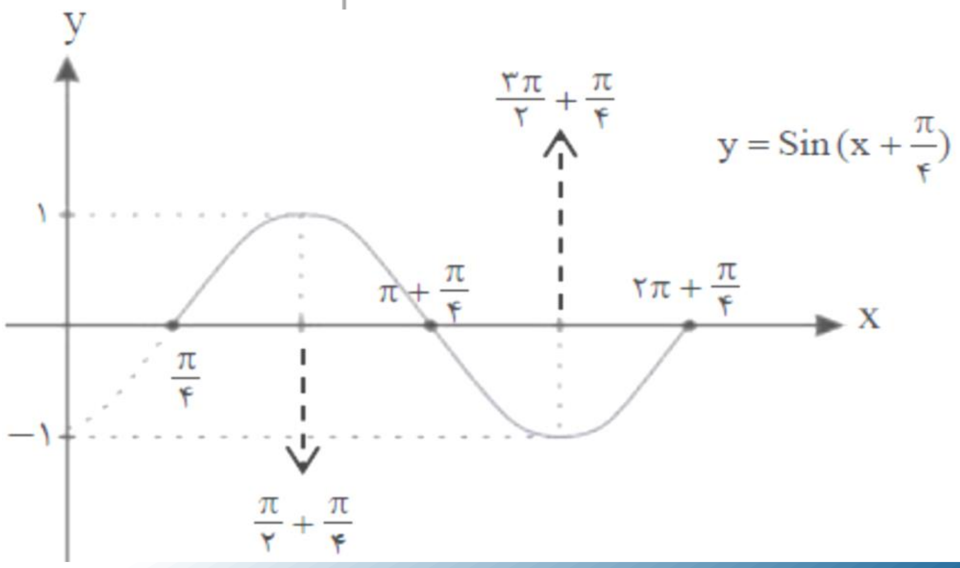
ب) $y = |\mathrm{Sin}\,x|$

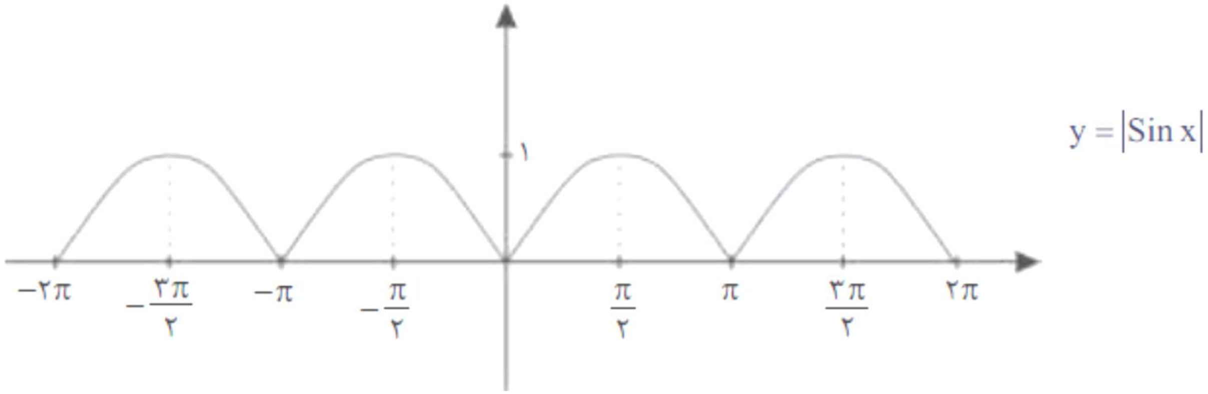
ج) $y = \mathrm{Sin}(x - \frac{\pi}{۴})$

د) $y = -۲\mathrm{Sin}\,x + ۱$





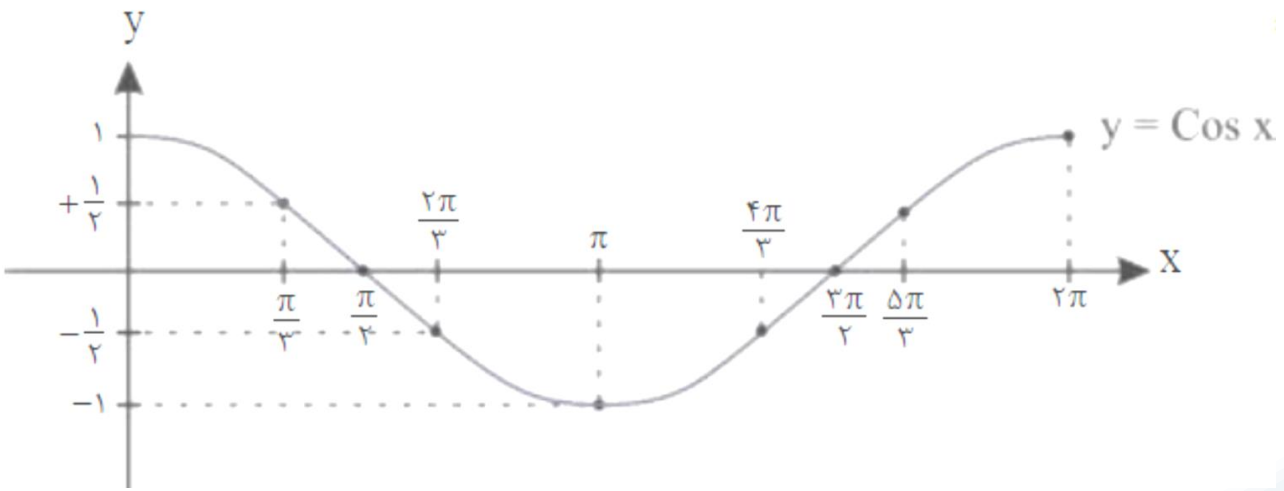




نمودار تابع $y = \cos x$

برای رسم نمودار تابع $y = \cos x$ روی بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، از روش نقطه‌یابی مطابق جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
مختصات نقطه	$(1,0)$	$(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2},0)$	$(\frac{2\pi}{3},-\frac{1}{2})$	$(\pi,-1)$	$(\frac{4\pi}{3},-\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},0)$	$(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$	$(2\pi,1)$



نکته: با توجه به نمودار تابع $y = \text{Cos}\,x$ در بازه $[۰,۲\pi]$، داریم:

☑ در بازه $[۰,\pi]$ مقدارش از ۱ به ۱- کاهش می‌یابد.

☑ در بازه $[\pi,۲\pi]$ مقدارش از ۱- به ۱ افزایش می‌یابد.

نکته: با توجه به نمودار کلی $y = \text{Cos}\,x$، نکات زیر را داریم:

☑ دامنه‌ی تابع $y = \text{Cos}\,x$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن بازه‌ی $[-۱,۱]$ است.

☑ حداکثر مقدار تابع $y = \text{Cos}\,x$ برابر ۱ است که در نقاطی به طول $k \in \mathbb{Z} \quad ; \quad x = ۲k\pi$ اتفاق می‌افتد.

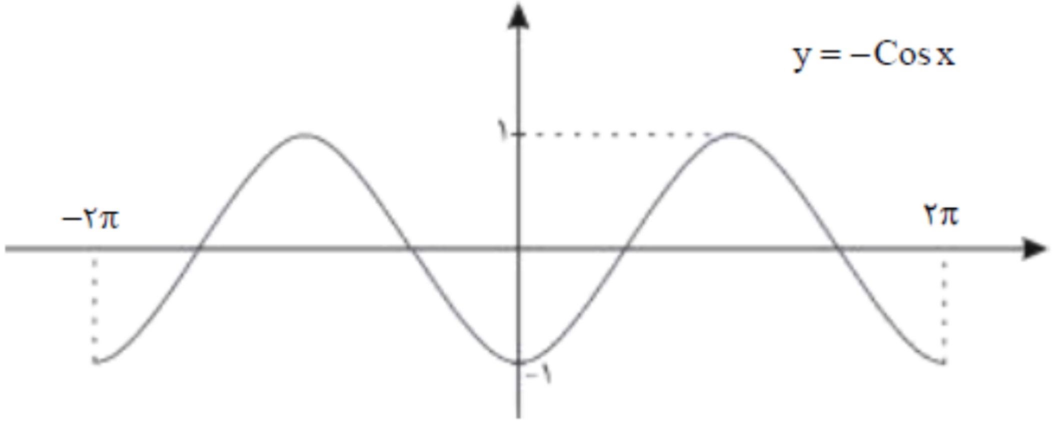
☑ کم‌ترین مقدار تابع $y = \text{Cos}\,x$ برابر ۱- است که در نقاطی به طول $(k \in \mathbb{Z})\ ,\ x = (۲k+۱)\pi$ اتفاق می‌افتد.

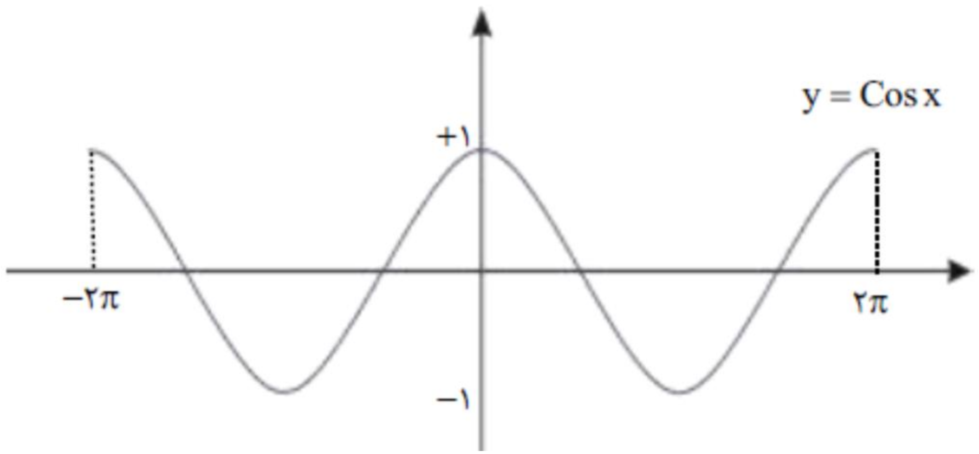
☑ مقدار تابع $y = \text{Cos}\,x$ در نقاطی به طول $(k \in \mathbb{Z})\ ,\ x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ برابر صفر است. در واقع طول نقاط تلاقی نمودار $y = \text{Cos}\,x$ با محور xها از تساوی $k \in \mathbb{Z} \quad ; \quad x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ به‌دست می‌آید

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -\mathrm{Cos}\,x$

ب) $y = \mathrm{Cos}(x+\frac{\pi}{۳})-۱$





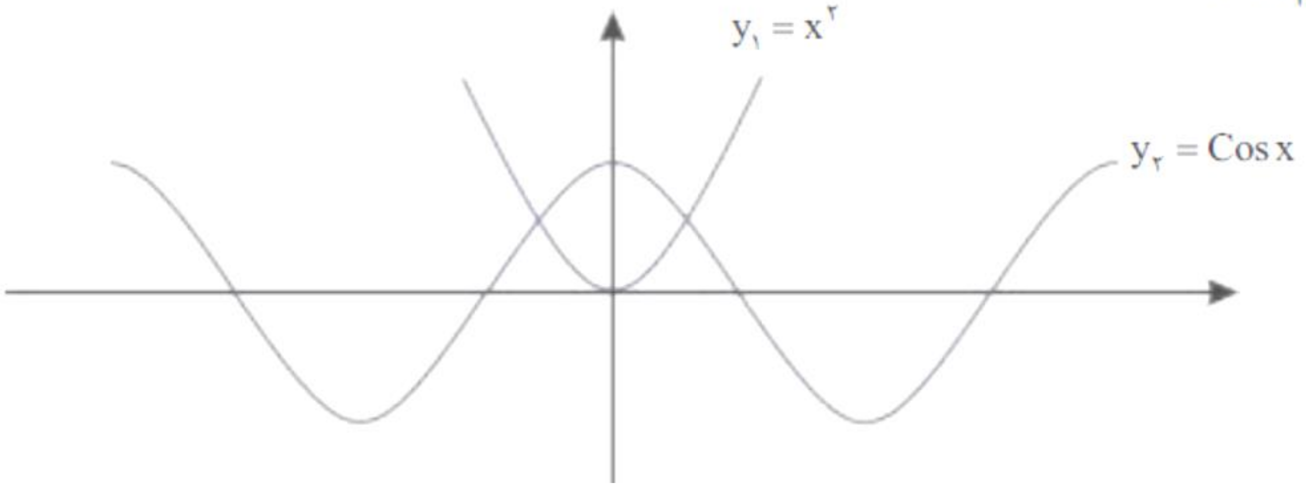
ب) برای رسم نمودار $y = \mathrm{Cos}(x+\frac{\pi}{۳})-۱$ ، ابتدا نمودار تابع $y = \mathrm{Cos}\,x$ را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = \mathrm{Cos}(x+\frac{\pi}{۳})$ به‌دست آید.

سپس نمودار به‌دست آمده را در راستای قائم یک واحد به سمت پائین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = \mathrm{Cos}(x+\frac{\pi}{۳})-۱$ به‌دست آید.

به کمک رسم نمودار، تعداد جواب‌های هر یک از معادلات زیر را به‌دست آورید.

الف) $x^۲ = \text{Cos}\, x$ ب) $|x| - \text{Sin}\, x = ۰$

الف) تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^۲ = \text{Cos}\, x$ همان تعداد نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $y_۱ = x^۲$ و $y_۲ = \text{Cos}\, x$ می‌باشد. که با رسم نمودارهای $y_۱$ و $y_۲$ خواهیم داشت:



تعداد نقاط برخورد ۲ تاست. پس تعداد جواب‌های معادله $x^۲ = \text{Cos}\, x$ برابر ۲ می‌باشد.

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی آشنا شده‌اید. مهم‌ترین این اتحادها عبارتند از:

۱) $$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\end{cases}$$

۲) $$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases} \Rightarrow \tan\alpha.\cot\alpha=1 \quad , \quad \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$$

۳) $$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

۴) $$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

همه‌ی اتحادهای فوق تنها شامل یک زاویه هستند، در ادامه اتحادهایی را بیان می‌کنیم که در آن‌ها دو زاویه مختلف به کار رفته باشند.

نسبت‌های مثلثاتی جمع و تفاضل دو زاویه

نکته: تمامی روابط نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه، به‌صورت زیر است:

۱) $\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta$

۲) $\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)=\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta$

$\longrightarrow$ نسبت‌های مثلثاتی سینوس مجموع و تفاضل

۳) $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\beta-\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta$

۴) $\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)=\mathrm{Cos}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Sin}\,\beta$

$\longrightarrow$ نسبت‌های مثلثاتی کسینوس مجموع و تفاضل

۵) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

۶) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

$\longrightarrow$ نسبت‌های مثلثاتی تانژانت مجموع و تفاضل

۷) $\mathrm{Cot}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{Cot}\,\alpha.\mathrm{Cot}\,\beta-1}{\mathrm{Cot}\,\alpha+\mathrm{Cot}\,\beta}$

۸) $\mathrm{Cot}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{Cot}\,\alpha.\mathrm{Cot}\,\beta+1}{\mathrm{Cot}\,\beta-\mathrm{Cot}\,\alpha}$

$\longrightarrow$ نسبت‌های مثلثاتی کتانژانت مجموع و تفاضل

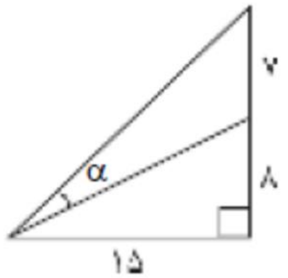
در مثلثی رابطه‌ی $\cos A.\cos B(\tan A+\tan B)=۱$ برقرار است. نوع مثلث چیست؟

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B} \quad \Rightarrow \tan A+\tan B=\frac{\sin A.\cos B+\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B} \quad \Rightarrow \tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\cos A.\cos B(\tan A+\tan B)=۱ \quad \Rightarrow \quad \cos A.\cos B\left(\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}\right)=۱ \Rightarrow \sin(A+B)=۱ \Rightarrow A+B=۹۰^{\circ}$$

با توجه با اینکه جمع دوزاویه مثلث برابر با ۹۰° است پس اندازهٔ زاویه سوم ۹۰° است. (زیرا جمع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است.)، پس مثلث قائم‌الزاویه است.



با توجه به شکل روبه‌رو، مقادیر $\tan\alpha$ و $\operatorname{Sin}\alpha$ را به‌دست آورید.

با توجه به اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی بزرگ‌تر، مشاهده می‌شود که مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس اگر زاویه‌ی حاده‌ی مجاور α را β بنامیم، آن‌گاه $\alpha+\beta=۴۵^\circ$ خواهد بود.

$$\tan\alpha=\tan\left(۴۵^\circ-\beta\right)=\frac{\tan ۴۵^\circ-\tan\beta}{۱+\tan ۴۵^\circ\times\tan\beta}=\frac{۱-\tan\beta}{۱+\tan\beta}$$

با توجه به شکل $\tan\beta=\frac{۸}{۱۵}$ است، پس:

$$\tan\alpha=\frac{۱-\frac{۸}{۱۵}}{۱-\frac{۸}{۱۵}}=\frac{\frac{۷}{۱۵}}{\frac{۲۳}{۱۵}}=\frac{۷}{۲۳}$$ ☑

به‌طور مشابه برای $\sin\alpha$ نیز داریم:

$$\operatorname{Sin}\alpha=\operatorname{Sin}\left(۴۵^\circ-\beta\right)=\operatorname{Sin}۴۵^\circ\times\operatorname{Cos}\beta-\operatorname{Cos}۴۵^\circ\times\operatorname{Sin}\beta$$

با توجه به شکل مساله، واضح است که: $\operatorname{Sin}\beta=\frac{۸}{۱۷}$ و $\operatorname{Cos}\beta=\frac{۱۵}{۱۷}$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\operatorname{Sin}\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱۵}{۱۷}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۸}{۱۷}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱۵}{۱۷}-\frac{۸}{۱۷}\right)=\frac{۷\sqrt{۲}}{۳۴}$$ ☑

اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۵x-۲=۰$ باشند، حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ را به‌دست آورید.

در معادله‌ی درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ در صورت وجود دو ریشه، داریم:

$$\frac{c}{a}=\text{ضرب دو ریشه} \qquad \text{و} \qquad \frac{-b}{a}=\text{مجموع دو ریشه}$$

ریشه‌ها $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ هستند، پس:

$$\text{ضرب ریشه‌ها}: \tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۱}=-۲ \qquad \text{جمع ریشه‌ها}: \tan\alpha+\tan\beta=-\frac{-۵}{۱}=۵$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{۵}{۱-(-۲)}=\frac{۵}{۳}$$

اگر $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید: $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$

می‌توان نوشت: $\alpha+\beta=k\pi-\gamma$ آن‌گاه:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(k\pi-\gamma) \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\tan(k\pi)-\tan\gamma}{۱+\tan(k\pi)\tan\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{۰-\tan\gamma}{۱-۰\times\tan\gamma} \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=-\tan\gamma$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \tan\alpha+\tan\beta=-\tan\gamma+\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$$

$$\Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma \quad ☑$$

نتیجه: در هر مثلث دلخواه $\overset{\Delta}{ABC}$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

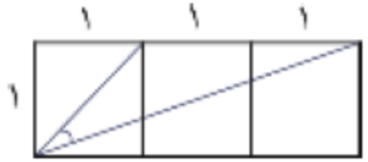
$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

نکته: اگر $m_۱$ و $m_۲$ شیب خطوط $d_۱$ و $d_۲$ باشند، آن‌گاه زاویه‌ی بین این خطوط از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

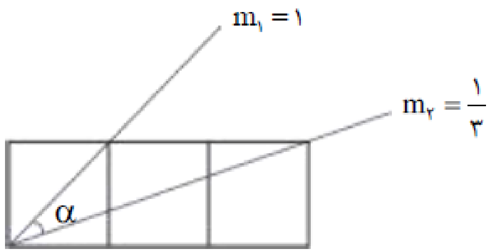
$$\tan\alpha = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}\right|$$

زاویه بین خطوط

در شکل مقابل تانژانت زاویه α را به‌دست آورید.



شکل را به‌صورت زیر نامگذاری می‌کنیم:



با توجه به شکل فوق، α زاویه حاده بین دو خط با شیب‌های $m_۱$ و $m_۲$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ . m_۲}\right| = \left|\frac{۱ - \frac{۱}{۳}}{۱ + ۱ \times \frac{۱}{۳}}\right| = \left|\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۴}{۳}}\right| = \frac{۱}{۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویه

نکته: اتحادهای مثلثاتی دو برابر زاویه را به‌طور خلاصه درزیرآورده‌ایم:

$$(1)\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha \quad , \quad (2)\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$(3)\ \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad , \quad (4)\ \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\sin 2x$ را به‌دست آورید.

اگر طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$\sin^2 + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

نکته: اتحادهای مثلثاتی زیر به اتحادهای توان شکن معروف هستند:

$$\mathrm{Cos}^{۲} x = \frac{۱+\mathrm{Cos}\,۲x}{۲} \quad و \quad \mathrm{Sin}^{۲} x = \frac{۱-\mathrm{Cos}\,۲x}{۲}$$

از این اتحادها برای به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی نصف زاویه، استفاده می‌شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{۸}$ را به‌دست آورید.

$$\mathrm{Cos}^{۲}\frac{\pi}{۸} = \frac{۱+\mathrm{Cos}\,۲(\frac{\pi}{۸})}{۲} = \frac{۱+\mathrm{Cos}\frac{\pi}{۴}}{۲}$$

$$\mathrm{Sin}^{۲}\frac{\pi}{۸} = \frac{۱-\mathrm{Cos}\,۲(\frac{\pi}{۸})}{۲} = \frac{۱-\mathrm{Cos}\frac{\pi}{۴}}{۲}$$

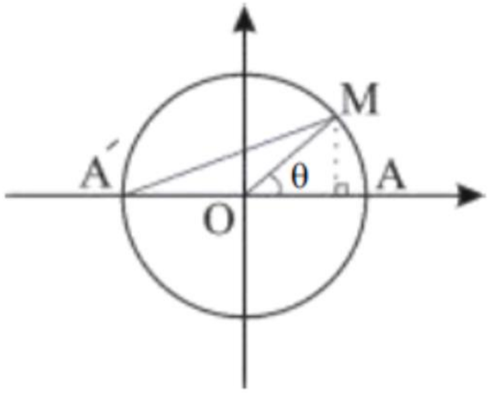
$$\mathrm{Cot}\frac{\pi}{۸} = \frac{۱}{\tan\frac{\pi}{۸}}$$

$$\tan\frac{\pi}{۸} = \frac{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{۸}}{\mathrm{Cos}\frac{\pi}{۸}}$$

با استفاده از دایره مثلثاتی، اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$(\text{۱})\qquad \tan\frac{\theta}{\text{۲}}=\frac{\sin\theta}{\text{۱}+\cos\theta} \qquad \text{و} \qquad (\text{۲})\qquad \tan\frac{\theta}{\text{۲}}=\frac{\text{۱}-\cos\theta}{\sin\theta}$$

اثبات حکم (۱)



$$\tan\theta=\frac{MH}{\text{۱}+OH}=\frac{\sin\theta}{\text{۱}+\cos\theta}$$

اثبات حکم (۲)

$$\tan\frac{\theta}{\text{۲}}=\tan(A\hat{M}H)=\frac{OA-OH}{MH}=\frac{\text{۱}-\cos\theta}{\sin\theta} \longrightarrow \quad ☑$$

نکته: رابطه‌ی تبدیل نسبت مثلثاتی سینوس و کسینوس با نسبت تانژانت یک زاویه به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} \\ \text{و} \\ \cos x = \dfrac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sin ۲x = \dfrac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} \\ \text{و} \\ \cos ۲x = \dfrac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} \end{cases}$$

اگر $۴\sin x + ۳\cos x = \frac{۷}{۵}$ باشد، مقدار $\tan\frac{x}{۲}$ را به‌دست آورید.

$$۴\sin x + ۳\cos x = \frac{۷}{۵} \Rightarrow ۴\times\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} + ۳\times\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow \frac{۸\tan\frac{x}{۲}+۳-۳\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} = \frac{۷}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۴۰\tan\frac{x}{۲}+۱۵-۱۵\tan^۲\frac{x}{۲} = ۷+۷\tan^۲\frac{x}{۲}$$

$$\tan\frac{x}{۲} = \frac{۴۰\pm\sqrt{۲۳۰۴}}{۴۴} = \frac{۴۰\pm۴۸}{۴۴} = \begin{cases} ۲ \\ -\dfrac{۲}{۱۱} \end{cases}$$

از توجه شما عزیزان سپاسگزاریم.

گروه آموزش ریاضی متوسطه دوره دوم

استان سیستان و بلو چستان