قسمت اول : تبدیل نمودار توابع

❖ **طریقه رسم نمودار** $mf(ax+b)+n$ **از روی نمودار** $f(x)$ **:**

۴ ۱ ۲ ۳

نکته : در تابع $y = m\,f(a\,x+b)+n$ مقادیر b و a روی دامنه و مقادیر n و m روی برد اثر می گذارند

مثال :

اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[-۳ \ . \ ۱۵]$ باشد دامنه تابع $-f(-۴\,x+۱)$ را بدست آورید.

$$-۳\le -۴x+۱\le ۱۵ \to -۴\le -۴x+۱\le ۱۴ \to \frac{-۱۴}{۴}\le x\le ۱ \to D_{-f(-۴x+۱)}=\left[\frac{-۷}{۲},۱\right]$$

مثال:

اگر دامنه تابع $y=f(۳\,x-۱)$ بازه $\left[-۴ \text{ و } ۵\right]$ باشد دامنه تابع $y=f(۵\,x+۲)$ را بیابید.

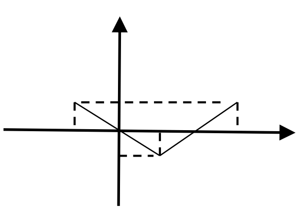
$$-۴\le x\le ۵ \to -۱\le ۳x\le ۱۵ \to -۱۳\le ۳x-۱\le ۱۴ \to D_f=[-۱۳,۱۴]$$

$$-۱۳\le ۵x+۲\le ۱ \to -۱۵\le ۵x\le -۱ \to -۳\le x\le \frac{-۱}{۵}$$

مثال:

اگر نمودار $y=-f(۲\,x)+۱$ به صورت مقابل باشد نمودار $y=f(۳\,x+۲)$ را رسم کنید

۲ ۳ ۱



تست :

اگر دامنه تابع $y=f(۲x)$ بازه $[-۴ \text{ و } ۳]$ باشد دامنه تابع $y=f(۳-۲|x|)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۷ ۹ ۱۱ ۱۳

$-۴\le x\le ۳\Rightarrow -۸\le ۲x\le ۶\Rightarrow D_f=[-۸,۶] \Rightarrow -۸\le ۳-۲|x|\le ۶\Rightarrow -۱۱\le -۲|x|\le ۳\Rightarrow \frac{-۳}{۲}\le |x|\le \frac{۱۱}{۲}$

$|x|\le \frac{۱۱}{۲}\Rightarrow -۵/۵\le x\le ۵/۵\Rightarrow -۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵$

پاسخ ۱۱ صحیح است

تست:

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازه $[-۱ \text{ و } ۲]$ باشد برد تابع $y=\left|-۳\ f\left(\frac{x}{۲}\right)+\frac{۲}{۳}\right|$ شامل چند عدد صحیح است

۴ ۲ ۶ ۷

$-۱\le\ f\left(\frac{x}{۲}\right)\le ۲\to -۶\le -۳\ f\left(\frac{x}{۲}\right)\le ۳\to -۶+\frac{۲}{۳}\le -۳\ f\left(\frac{x}{۲}\right)\le ۳+\frac{۲}{۳}\to \frac{-۱۶}{۳}\le -۳\ f\left(\frac{x}{۲}\right)+\frac{۲}{۳}\le \frac{۱۱}{۳}$

$۰,۱,۲,۳,۴,۵$

گزینه ۶ صحیح است

مثال:

نمودار $y=|x-۲|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قرینه شکل حاصل را نسبت به محور y ها تعیین سپس دو برابر در راستای محور y ها منبسط کرده و بعد انعکاس آن را نسبت به محور x ها پیدا می کنیم معادله نمودار حاصل را بدست آورید

$x\to x+۳, x\to -x \quad y=|x+۳-۲|\to y=|-x+۱|\to y=۲|-x+۱|\to y=-۲|-x+۱|$

قسمت دوم: یکنــــوایی توابــــع

❖ بررسی یکنوایی ترکیب توابع:

مثال :

اگر روی R تابع f نزولی و تابع g یک تابع صعودی هست در مورد یکنوایی تابع fog چه می توان گفت ؟

نزولی $(fog)(x)=f(g(x)) \quad x_1<x_2 \xrightarrow{g} g(x_1)<g(x_2) \xrightarrow{f} f(g(x_1))>f(g(x_2)) \to fog$

fog	g	f
صعودی	صعودی	صعودی
صعودی	نزولی	نزولی
نزولی	صعودی	نزولی
نزولی	نزولی	صعودی

نکته :

الف) اگر f اکیدا صعودی(اکیدانزولی) و علامت آن همواره مثبت و یا همواره منفی باشد آنگاه تابع $\frac{1}{f}$ اکیدا نزولی(اکیدا صعودی)خواهد بود

ب) اگر f اکیدا صعودی(اکیدانزولی) باشد تابع f^{-1} نیز اکیدا صعودی (اکیدا نزولی) خواهد بود

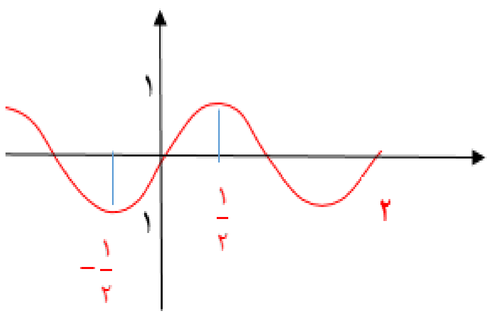
ج) اگر f اکیدا صعودی(اکیدانزولی) باشد $-f$ اکیدا نزولی (اکیداصعودی) خواهد بود

تست:

اگر تابع f با دامنه R نزولی با جملات منفی باشد تابع $f\left(\frac{1}{f}(-f(\sin \pi x))\right)$ در بازه $\left(\frac{-1}{2} \text{ و } \frac{1}{2}\right)$ چگونه است

صعودی **نزولی** **ابتدا صعودی بعد نزولی** **ابتدا نزولی بعد صعودی**

$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$



تابع $\sin \pi x$ در بازه ی $\sin \pi x$ صعودی است $\frac{1}{f}$ صعودی بنابراین داریم

(((صعودی)صعودی)صعودی) نزولی در نتیجه :

$\left(\frac{1}{f}(-f(\sin \pi x))\right)$ نزولی

تست:

اگر fاکیدا صعودی و g اکیدا نزولی باشد کدامیک از توابع زیر همواره اکیدا صعودی است

$fo\left(\frac{1}{g}\right)$ $\quad f^{-1}og \quad g^{-1}o(-f) \quad fo\left(\frac{-1}{g}\right)$

$fo\left(\frac{1}{g}\right)$چون ضابطه g را نداریم بنابراین در ارتباط با صعودی و نزولی نمی توان صحبت کرد گزینه درست نیست.

f^{-1} صعودی و g نزولی بنابراین $f^{-1}og$ نزولی است

g^{-1} نزولی و $-f$ نزولی بنابراین $g^{-1}o(-f)$ صعودی است

$fo\left(-\frac{1}{g}\right)$چون ضابطه g را نداریم بنابراین در ارتباط با صعودی و نزولی نمی توان صحبت کرد گزینه درست نیست.

تست:

نمودار تابع f در بازه $\left[-1 \text{ و } 1\right]$ به صورت مقابل است در مورد تابع $(fof)(x)$ در این بازه چه می توان گفت.

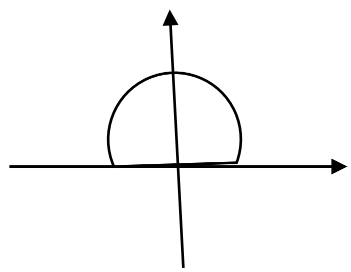
صعودی نزولی ابتدا صعودی بعد نزولی ابتدا نزولی بعد صعودی

نزولی

$$-1\le x\le 0 \to x_1<x_2 \xrightarrow{f} f(x_1)<f(x_2) \xrightarrow{f(x_1),f(x_2)\in[0,1]} f(f(x_1))>f(f(x_2)) \Rightarrow (fof)(x)$$

$$0\le x\le 1 \to x_1<x_2 \xrightarrow{f} f(x_1)>f(x_2) \xrightarrow{f(x_1),f(x_2)\in[0,1)} f(f(x_1))<f(f(x_2)) \Rightarrow (fof)(x)$$

صعودی



گزینه ۴ صحیح است

تست:

به ازای چند مقدار صحیح k تابع $f(x)=k\,x^2+(3-k)\,x$ در بازه $\left[\frac{-1}{4} \text{ و } \infty\right)$ اکیدا صعودی است

بی شمار ۲ ۳ ۴

در بازه ی $\left[\frac{-1}{4} \text{ و } \infty\right)$ اکیدا صعودی پس $k>0$ بنابراین

$$\frac{k-3}{k}\le -\frac{1}{4} \xrightarrow{4k>0} 4k-12\le -k \to 5k\le 12 \to k\le \frac{12}{5} \to k\le 2/4 \to 0<k\le 2/4$$

$$k=0 \to y=3x,\ k=0,1,2$$

گزینه ۳ صحیح است

مثال :

اگر f تابعی اکیدا نزولی با دامنه R باشد دامنه تعریف $y = \log_{۵}\left(f(|x|) - f\left(\frac{x}{۳} + ۱\right)\right)$ در بازه $(a \text{ و } b)$ باشد مقدار b و a را بیابید

$$f(|x|) - f\left(\frac{x}{۳}+۱\right) > ۰ \rightarrow f(|x|) > f\left(\frac{x}{۳}+۱\right) \xrightarrow[\text{نزولی}]{f} |x| < \frac{x}{۳}+۱$$

تست :

تابع f با دامنه $(-۲ \text{ و } \infty)$ اکیدا صعودی و $f(۴a^۲ + a) > f(۵a^۲ - ۷a)$ است مجموع مقادیر صحیح a کدام است

۱۹ ۲۰ ۲۷ ۲۸

$$۴a^۲ + a > ۵a^۲ - ۷a \Rightarrow a^۲ - ۸a < ۰ \Rightarrow ۰ < a < ۸$$

$$۴a^۲ + a > -۲ \Rightarrow ۴a^۲ + a + ۲ > ۰ \Rightarrow \Delta = -۷ < ۰, a > ۰$$

$$۵a^۲ - ۷a > -۲ \rightarrow ۵a^۲ - ۷a + ۲ > ۰ \Rightarrow a < \frac{۲}{۵} \text{ یا } a > ۱$$

$$a = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$$

با توجه به دامنه $a \neq ۱$ بنابراین پاسخ ۲۷ است.

قسمت سوم: واورون توابع

نکته :

الف) $x \in D_f$ $\qquad\qquad$ $(f^{-۱}of)(x) = x$

ب) $x \in D_{f^{-۱}}$ $\qquad\qquad$ $(fof^{-۱})(x) = x$

مثال :

اگر $x \leq ۲$ $\qquad$ $f(x) = -x^{۲} + ۴x - ۳$ نمودار $y = (fof^{-۱})(x)$ را رسم کنید

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \Rightarrow y = \left(fof^{-۱}\right)(x) = x , x \in D_{f^{-۱}} = R_f$$

$$f(x) = -x^{۲} + ۴x - ۳ = -\left(x^{۲} - ۴x + ۳\right) = -\left(\left(x-۲\right)^{۲} - ۱\right) \Rightarrow R_f = \left(-\infty , ۱\right)$$

تست:

اگر $f(x) = \sqrt{۴ - x} + ۲$ و نقاط B و A ابتدا و انتهای نمودار تابع $h(x) = (fof^{-۱})(x) + (f^{-۱}of)(x)$ باشد طول پاره خط AB کدام است

$۹\sqrt{۵}$ $\qquad$ $۴\sqrt{۵}$ $\qquad$ $۲\sqrt{۵}$ $\qquad$ $\sqrt{۵}$

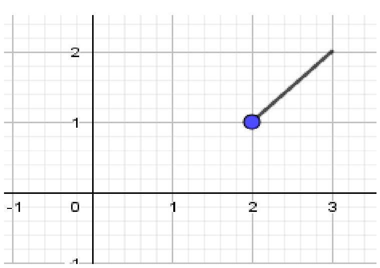
$$\left(fo\overset{-۱}{f}\right)(x) \to x \in D_{\overset{-۱}{f}} \;,\; \left(\overset{-۱}{f}of\right)(x) \to x \in D_f$$

$$h(x) = x + x = ۲x \to x \in D_{\overset{-۱}{f}} \cap D_f$$

$$D_f = \left(-\infty , ۴\right] , D_{\overset{-۱}{f}} = R_f = \left[۲ , +\infty\right) \Rightarrow D_{\overset{-۱}{f}} \cap D_f = \left[۲ , ۴\right] \to f(۲) = ۴ , f(۴) = ۸ \to AB = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$

مثال:

اگر $f^{-۱}(x)$ وارون تابع $f(x) = x + [x]$ با دامنه $D_f = [۱. ۲)$ باشد نمودار $y = (fof^{-۱})(x)$ را رسم کنید.



$$y = x , x \in D_{f^{-۱}} \quad , ۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \to f(x) = y = x + ۱$$

$$\Rightarrow y - ۱ = x \Rightarrow f^{-۱} = x - ۱ , ۲ \leq x < ۳$$

تست:

اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ آنگاه دامنه $y=\sqrt{۱+(f^{-۱}of)(x)}$ کدام است

$(-\infty, ۱]$ $(-\infty, -۱]$ $[۰, ۱]$ $[-۱, ۱]$

$D_f = ۱-x \geq ۰ \to x \leq ۱ \quad , y=\sqrt{۱+x} \Rightarrow ۱+x \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \to D_y = [-۱,+\infty)$

$D_f \cap D_y = [-۱,۱]$

مثال:

به ازای کدام مقدار b تابع $f(x)=۲x^۳-b\,x+a$ نمودار وارون خودش را در نقطه $\left(-۲ , \frac{۱}{۲}\right)$ قطع می کند

$f(-۲)=\frac{۱}{۲}, f\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۲ \quad \begin{cases} -۱۶+۲b+a=\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}b+a=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=۳۳ \\ ۴a-۲b=-۹ \end{cases} \to ۸a=۲۴ \to a=۳$

$,۴a-۲b=-۹ \to -۲b=-۹-۱۲=-۲۱ \to b=\frac{۲۱}{۲}$

نکته: اگر تابع f وارون خود را در نقطه $(m\,.\,n)$ قطع کند آنگاه $f(n)=m$ و $f(m)=n$